13. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 10. Dezember 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Proposition 1
Sei $\tilde{F}$ ein algebraischer Abschluss von F. Dann ist $\tilde{F}$ algbraisch abgeschlossen.

Beweis
Sei $f(x) \in \tilde{F}(x)$;α ist Nullstelle von $f(x)$. Dann ist $\tilde{F}(\alpha)/\tilde{F}$ algebraisch und $\tilde{F}/F$ algebraisch. Also ist auch $\tilde{F}(\alpha)/F$ algebraisch und damit ist auch α/F algebraisch.
Sei $m_{\alpha,F}$ ein Minimalpolynom von α/F, dann zerfällt $m_{\alpha,F}$ in $\tilde{F}[x]$ und hat $(x-\alpha)$ als linearen Faktor. Es folgt $\alpha \in \tilde{F}$. $\square$

Sei F ein beliebiger Körper. Wir zeigen nun:
Satz 1
Es gibt eine algebraische abgeschlossene Körpererweiterung von F.

Beweis
Setze $F = K_0$. Wir definieren per Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$ eine ansteigende Folge

$$K_0 \subseteq \cdots \subseteq K_j \subseteq K_{j+1} \subseteq \cdots$$

von der Körpererweiterung, so dass jedes Polynom $f \in K_{j-1}[x]$ mit $\deg f \geq 1$ eine Nullstelle in K_j hat. Dann setzen wir $K := \bigcup K_j$.
K/F ist dann eine Körpererweiterung, wenn $f(x) \in K[x](\deg f \geq 1)$, so dass ein j existiert mit $f(x) \in K_j[x]$ und f hat eine Nullstelle in $K_{j+1} \subseteq K$. Also ist K algebraisch abgeschlossen.

Und nun zur Induktion:
Für $f(x) \in F[x](\deg f \geq 1)$ sei x_f eine neue Variable. Betrachte $F[\cdots, x_f, \cdots]$ (Polynom in der Variablen x_f) und das Ideal $I := < \{f(x_f); f \in F[x]\} >$.

Behauptung
I ist echt. Sonst ist

$$1 = g_1 f_1(x_{f_1}) + \cdots + g_n f_n(x_{f_n})(*)$$

mit $g_i \in F[\cdots, x_f, \cdots]$. Schreibe $x_i := x_{f_i}$ für $i = 1, \ldots, n$ und seien $x_{n+1}, \ldots, x_m$ alle anderen Variablen, die unter den g_i's noch vorkommen. Also ist

$$1 = g_1(x_1, \ldots, x_m) f_1(x_1) + \cdots + g_n(x_1, \ldots, x_m) f_n(x_n)(*)$$

eine polynomiale Gleichung.
Sei F'/F eine Körpererweiterung mit $\alpha_i \in F'$, Nullstelle für $f_i(x)$. Durch Einsetzen von α_i für x_i mit $i = 1, \ldots, n$ und 0 für x_j mit $j = n-1, \ldots, m$ in $(*)$ muss es immer noch eine Gleichung ergeben, die nun im Körper F' gelten muss, das heißt $1 = 0$ in F' - Widerspruch.

I ist echt. Sei $\mathcal{M}$ maximal. $\mathcal{M} \lhd F[\cdots, x_f, \cdots]$ und $I \subseteq \mathcal{M}$. Setze $K_1 := f[\cdots, x_f, \cdots]/\mathcal{M}$. K_1/K_0 und $f \in K_0[x]$ hat eine Nullstelle in K_1, weil $f(\overline{x_f}) = \overline{f(x_f)} = 0$ (da $f(x_f) \in I$).
Wiederhole mit K_j/K_{j-1} und setze $K = \bigcup K_j$ wie schon erwähnt. □

Korollar 1
$\exists^Z$: Sei K algebraisch abgeschlossen und $F \subseteq K$. Dann ist der relative algebraische Abschluss von F in K (siehe Korollar 2 aus der 11. Vorlesung vom 29.11.2012) ein algebraischer Abschluss von F.
Eindeutigkeit: (Übungsaufgabe siehe Übungsblatt))
Ein algebraischer Abschluss von F ist bis auf Isomorphie eindeutig.

Beweis
Per Definition ist $\tilde{F}/F$ algebraisch. Sei $f(x) \in F[x]$ ($\deg f \geq 1$), da K algebraisch abgeschlossen ist. $K[x] \ni f(x)$ zerfällt vollständig in lineare Faktoren $(x - \alpha)$ in $K[x]$. Aber α ist algebraisch über F und $\alpha \in K$, also $\alpha \in \tilde{F}$. Also zerfällt $f(x)$ in $\tilde{F}[x]$. □

§ Separable und inseparable Körpererweiterung

Bemerkung

Sei $f(x) \in F[x]$, K/F ein Zerfällungskörper für f. Also $f(x) = (x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} \cdots (x-\alpha_k)^{n_k}$ in $K[x]$; $n_i \geq 1$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \notin j$.

Definition 1

- n_i ist die *Vielfachheit* der Nullstelle α_i.
- α_i ist eine *mehrfache* Nullstelle, wenn $n_1 > 1$, sonst ist
- α_i eine *einfache* Nullstelle.

Definition 2

(1) $f(x) \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$ ist *separabel*, wenn es nur einfache Nullstellen hat.

(2) f nicht separabel heißt *inseparabel*.

Definition 3

$Df(x) = D(a_n x^n + \cdots + a_0) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \in F[x]$.
$D : F[x] \to F[x]$ ist ein *Ableitungsoperator* und erfüllt die Produktregel

$$Dfg = gDf + fDg.$$

Bemerkung

(i) $\deg Df < \deg f$ immer !

(ii) $f(x) = x^p \in F[x]; p$ ist Primzahl; Char $F = p$. Dann ist $f(x) \not\equiv 0$, aber $Df(x) = px^{p-1} \equiv 0$.

(iii) $f(x) \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$ und Char $F = 0 \Rightarrow Df \not\equiv 0$ (weil zum Beispiel $na_n \neq 0$, falls $a_n \neq 0$ ist).

Proposition 2

Sei $f(x) \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$. Eine Nullstelle α für $f(x)$ ist eine mehrfache Nullstelle genau dann, wenn α auch eine Nullstelle für $Df(x)$ ist. Das heißt, dass die Menge $\{$ mehrfache Nullstelle von $f\} = \{$ gemeinsame Nullstelle von f und $Df\}$ ist.

Beweis

"$\Rightarrow$" Sei α eine mehrfache Nullstelle. $f(x) = (x-\alpha)^n g(x)$ mit $n \geq 2$.
$Df(x) = n(x-\alpha)^{n-1}g(x) + (x-\alpha)^n Dg(x)$; $n-1 \geq 1 \Rightarrow \alpha$ ist Nullstelle von $Df(x)$.

"$\Leftarrow$" Sei α eine gemeinsame Nullstelle von $f(x)$ und $Df(x)$.
Schreibe $f(x) = (x-\alpha)h(x)$. $(*)$
Also ist $Df(x) = h(x) + (x-\alpha)Dh(x)$. Beim Einsetzen von α für x, ergibt das $h(\alpha) = 0$.
Zurück in $(*)$ ergibt es $f(x) = (x-\alpha)^2 h_1(x)$. $\square$

Bemerkung

Die mehrfachen Nullstellen von f stimmen überein mit den gemeinsamen Nullstellen von f und DF, das heißt mit den Nullstellen von ggT (f, Df).

Beweis

"$\Leftarrow$" α ist Nullstelle von ggT $(f, DF) \rightarrow \alpha$ ist Nullstelle von f und Df. Ist klar.

"$\Rightarrow$" Sei α eine Nullstelle von f und $DF \in F[x]$. Also gilt $m_{\alpha,F}/f$ und $m_{\alpha,F}/Df$ und damit $m_{\alpha,F}/$ ggT (f, Df) auch. Da α Nullstelle von $m_{\alpha,F}$, folgt nun α ist Nullstelle von ggT. $\square$

Korollar 2

$f \in F[x]$ $(\deg f \geq 1)$ ist separabel genau dann, wenn ggT $(f, Df) = 1$.

Beweis

"$\Leftarrow$" Folgt aus der Bemerkung.

"$\Rightarrow$" f separabel $\Rightarrow$ keine gemeinsame Nullstelle mit $Df \Rightarrow$ ggT $(f, Df) = 1$. $\square$