16. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 20. Dezember 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Satz 1

Sei $H =< x >$ zyklisch

(1) Sei $K \leq H$, dann ist K zyklisch.

(2) Wenn $|H| = \infty$, dann sind $< x^j > \neq < x^i >$ für $i \neq j$ und $\{< x^i > i \in \mathbb{N}_0\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von H. (Übungsaufgabe).

(3) Wenn $|H| = n < \infty$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a|n$, dann gibt es eine eindeutige Teilgrupe der Ordnung a, nämlich $< x^{n/a} >$ und $\{< x^d > |d|n\}$ ist die Menge aller Teilgruppen von $H \neq \{1\}$.

Beweis

(1) $K = \{1\}$ ist zyklisch, also ohne Einschränkung $K \neq \{1\}$.
Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste, so dass $x^k \in K$. Also ist $< x^k > \leq K$.
Sei $x^a \in K; DA \Rightarrow a = qk + r$ mit $0 \leq r < k$ und $x^r = x^a x^{-qk} \in K$.
Da k minimal gewählt ist, muss $r = 0$ sein. Also $a = qk$ und $x^a = (x^k)^q \in < x^k >$.
Also $K \leq < x^k >$.

(3) Sei $d := \frac{n}{a}$, also $d|n$ und $|x^d| = \frac{n}{ggT(n,d)} = n/d = n/(n/a) = a$. Somit ist $| < x^d > | = a$.
Eindeutigkeit: Sei $K \leq H$ mit $|K| = a$ und $b \in \mathbb{N}$ kleinste, so dass $K =< x^b >$. Wir berechnen $\frac{n}{d} = a = |K| = |x^b| = \frac{n}{ggT(n,b)}$. Daraus folgt $d = ggT(n, b)$, insbesondere $d|b$.
Also $x^b \in < x^d >$ und $K =< x^b > \leq < x^d >$.
Da aber $|K| = a = | < x^d > |$, folgt nun $K =< x^d >$. $\square$

Proposition 2

Sei $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge von Teilgruppen, dann ist $\bigcap \mathcal{A}$ auch eine Teilgruppe.

Beweis

Setze $K := \bigcap \mathcal{A}; a, b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in A$, für alle $A \in \mathcal{A}$ (weil $A \leq H$), also $ab^{-1} \in K$ und damit $K \leq H$. $\square$

Definition 1
Sei $S \subseteq H$ eine Untermenge; $\mathcal{A} := \{K \leq H; S \subseteq K\}$.
Definiere $< S >= \bigcap \mathcal{A}$. $< S >$ ist die (für die Inklusion) kleinste Teilgruppe von H, die S enthält. $< S >$ heißt die *Teilgruppe, die von S erzeugt ist.*
Konvention: $< \emptyset >= \{1\}$
Notation: $S = \{a_1, \ldots, a_n\}; < S >=< a_1, \ldots, a_n >$ (wenn S endlich ist).

Proposition 3
Sei $S \neq \emptyset$. $< S >= \{a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}; n \in \mathbb{N}; a_i \in S; \varepsilon_i = \pm 1\}$.

Beweis
Übungsaufgabe zu zeigen: Diese Menge ist eine Teilgruppe. Sie enthält S und muss in jeder Teilgruppe, die S enthält enthalten sein. $\square$

Spezialfall: Wenn H abelsch. (Übungsaufgabe, Übungsblatt).

Proposition 4
Sei $\varphi : G \to H$ ein Homommorphismus. Es gelten

(1) $\varphi(1) = 1$
(2) $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$
(3) $\varphi(g^n) = \varphi(g)^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
(4) $\ker \varphi := \{g \in G; \varphi(g) = 1\} \leq G$
(5) $\operatorname{im} \varphi := \{h \in H; \exists g \in G : \varphi(g) = h\} \leq H$

Wir wollen Faktorengruppen definieren.

Definition 2
Sei $H \leq G$ und $g \in G$.
$gH := \{gh \mid h \in H\}$ ist die linke Nebenklasse von g bezüglich H und $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ ist die rechte Nebenklasse.
Additive Notation: $g + H$ und $H + g$

Proposition 5
Sei $H \leq G$. Es gelten:

(1) Die Menge der linken Nebenklassen bilden eine Partition von G i.e. $G = \bigcup_{g \in G} gH$ und $uH \cap vH \neq \emptyset \Rightarrow uH = vH$.
(2) Für alle $u, v \in G : uH = vH \Leftrightarrow v^{-1}u \in H$.

Beweis

(1) $1 \in H$, also $g \in gH$ für alle $g \in G$. Also $G = \bigcup gH$. Wenn $uH \cap vH \neq \emptyset$. Sei $x \in uH, x \in vH$, also $x = uh_1 = vh_2$ für geeignete $h_1, h_2 \in H$. Also $u = v \underbrace{h_2 h_1^{-1}}_{\in H}$.

Sei $t \in H$. Es gilt also $ut = v(h_2 h_1^{-1})t = v(h_2 h_1^{-1} t) \in vH$, so dass $uH \subseteq vH$.
Analog: $uH \supseteq vH$.

(2) $uH = vH$ genau dann, wenn $u \in vH$ genau dann, wenn $u = vh$ für ein $h \in H$ genau dann, wenn $v^{-1}u \in H$. $\square$

Proposition 6

Sei $N \leq G$. Die Verknüpfung

$$(uN)(vN) := (uv)N$$

ist wohldefiniert genau dann, wenn

$$ghg^{-1} \in N \text{ für alle } g \in G; \text{ für alle } h \in N \tag{*}$$

Beweis

"$\Rightarrow$" Wohldefiniert $\rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} u, u_1 \in uN \\ v, v_1 \in vN \end{array}\right\} \Rightarrow (uv)N = (u_1 v_1)N$$

Sei $g \in G, n \in N$, dann setze $u = 1, v = g^{-1}, u_1 = n, v_1 = g^{-1} \Rightarrow 1g^{-1}N = ng^{-1}N$ i.e. $g^{-1}N = ng^{-1}N$.

Nun: $ng^{-1} \in ng^{-1}N$, also $ng^{-1} \in g^{-1}N$. Also $ng^{-1} = g^{-1}n_1$ für geeignete $n_1 \in \mathbb{N}$. Also $gng^{-1} = n_1 \in N$.

"$\Leftarrow$" Sei $u, u_1 \in uN, v, v_1 \in vN$. Zu zeigen: $(uv)N = (u_1 v_1)N$.
Schreibe $u_1 = un, v_1 = vm; n, m \in N$. Wir zeigen: $u_1 v_1 \in (uv)N$.
Wir berechnen: $u_1 v_1 = (un)(vm) = u(vv^{-1})nvm = uv(\underbrace{v^{-1}nv}_{:= n_1 \in N})m = uvn_1 m = uv(\underbrace{n_1 m}_{\in N})$ $\square$

Zusatz zu Proposition 6

Wenn wohldefiniert, dann definiert die Verknüpfung $(uN)(vN) := (uv)N$ eine Gruppenoperation auf die Menge der linken Nebenklassen. (Übungsaufgabe).

Definition

Sei $N \leq G$. N ist normal, falls $(*)$ in Proposition 6 gilt. Schreibe $N \lhd G$.

Beispiel

Sei φ ein Homomorphismus. $N := \ker \varphi$ ist normal, weil
$\varphi(gng^{-1}) = \varphi(g)\varphi(n)\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)\varphi(g)^{-1} = 1$.
Also $gng^{-1} \in N$ für alle $g \in G$ und $n \in N$.
Umgekehrt: Sei G/N *die Gruppe der linken Nebenklassen* für ein $N \lhd G$.

Proposition 7

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & G & \twoheadrightarrow & G/N \\ & g & \mapsto & gN \end{array}$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker \varphi = N$.