

19. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 14. Januar 2013

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

In dieser Vorlesung wurde hauptsächlich die 18. Vorlesung kurz wiederholt und die Begriffe auf Deutsch nochmals zusammengefasst.

Definition 1

(1) Eine Gruppe $G \neq \{1\}$ ist *einfach*, wenn die einzigen Normalteiler nur $\{1\}$ und G sind.

(2) $\{1\} = H_0 \leq \dots \leq H_s = G$ ist eine *Normalreihe*, wenn $H_i \triangleleft H_{i+1}$.

Notation: $H \triangleleft G$ “ H Normalteiler in G ” wird auch so bezeichnet: $G \triangleleft H$ “ $H \leq G$ ist Normateiler”

(3) $H_{i+1}/H_i; i = 0, \dots, s_1$ sind die *Faktorgruppen* oder die *Faktoren* oder die *Quotienten* der Normalreihe

(4) Die Normalreihe heißt *Kompositionsreihe*, falls alle Faktoren einfach sind.

(5) Zwei Reihen

$$H_0 \triangleleft \dots, \triangleleft H_i \triangleleft H_{i+1} \triangleleft \dots \triangleleft G$$

$$\text{und } K_0 \triangleleft \dots, \triangleleft K_j \triangleleft K_{j+1} \triangleleft \dots \triangleleft G$$

sind *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $i \rightarrow j$ gibt, so dass die korrespondierenden Faktoren isomorph sind: $H_{i+1}/H_i \simeq K_{j+1}/K_j$.

(Ende der Wiederholung der 18. Vorlesung.)

Definition 2

G heißt *auflösbar* (englisch: solvable), wenn es eine *Normalreihe mit abelschen Faktoren* hat.

Erinnerung

(i) S_n ist nicht abelsch für $n \geq 3$.

(ii) A_n ist nicht abelsch für $n \geq 4$.

Begründung: (123) und (234) kommutieren nicht.

Beispiele

S_n ist auflösbar für $n \leq 4$

(a) $S_3 \triangleright A_3 \triangleright \{1\}$

$|S_3/A_3| = 2$ $|A_3/\{1\}| = 3$: Diese zwei Gruppen haben als Ordnung eine Primzahl.
Es folgt aus Lagrange, dass die Gruppen zyklisch sind, also abelsch.

(b) $S_4 \triangleright A_4 \triangleright V \triangleright W \triangleright \{1\}$, wobei $V = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ die *kleinsche Vierergruppe* ist und $W := \{1, (12)(34)\}$.

$|S_4/A_4| = 2$ $|A_4/V| = 3$ $|V/W| = 2$.