2. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 25. Oktober 2012

Korollar

Sei $I \lhd R$. Betrachte die Teilringe A von R mit $I \subseteq A \subseteq R$ einerseits und die Teilringe von R/I andererseits.
Die Abbildung

$$A \mapsto A/I$$

ist bijektiv und respektiert Inklusion. Ferner gilt fr $I \subseteq A \subseteq R$, dass $A \lhd R$ genau dann, wenn $A/I \lhd R/I$.

Beweis

Siehe Übungsblatt 2. $\square$

Notation

$x + I$ wird manchmal auch als $\overline{x}$ geschrieben.

Definition

Sei $A \subseteq R$ eine beliebige Teilmenge. Das *von A erzeugte Ideal* ist das kleinste Ideal, das A enthält (und wird mit $< A >$ bezeichnet), e.g. $< \emptyset >= \{0\}$.

Bemerkung (Übungsaufgabe)

$$< A > \; = \bigcap_{\{A \subseteq J \lhd R\}} J$$

(ist der Durchschnitt aller Ideale, die A enthalten) und außerdem ist

$$< A >= \{\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \; / n \in \mathbb{N}; r_i \in R; a_i \in A\}$$

(also die Menge aller R-Linearkombinationen aus endlichen Elementen von A).
Konvention: Wenn $A = \{a_1, \ldots, a_l\}$ endlich ist, so schreiben wir einfach $< a_1, \ldots, a_l >$.

Definition

Sei $a \in R$. $< a >= \{ra; r \in R\}$ heißt *Hauptideal*, das von a erzeugt ist.

Beispiel

$< 1 >= R$ und $< 0 >= \{0\}$.

Proposition
Sei $I \lhd R$

(1) $I = R$ genau dann, wenn $I \bigcap R^{\times} \neq \emptyset$

(2) R ist ein Körper genau dann, wenn die einzigen Ideal R und $\{0\}$ sind.

Beweis

(1) "$\Rightarrow$" trivial

"$\Leftarrow$"
$$\begin{array}{ccccc} u \in I & \Rightarrow & u^{-1}u \in I & \Rightarrow & 1 \in I \\ & & \uparrow & & \\ \text{Einheit} & & R & \Rightarrow & r.1 \in I \ \forall\, r \in R \end{array}$$

(2) "$\Rightarrow$" Sei $I \neq \{0\}$ und $u \in I; u \neq 0$. Dann ist u eine Einheit und somit $I = R$.

"$\Leftarrow$" Sei $x \in R, x \neq 0$. Dann ist $< x >= R$, d.h. $1 \in< x >$, also existiert ein $r \in R$ mit $rx = 1$, also $r = x^{-1}$ $\square$

Korollar
Sei R ein Körper , S ein Ring und $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Ist $\varphi \neq 0$, dann ist φ injektiv.

Beweis
$\ker \varphi = \{0\}$. $\square$

Definition
$M \lhd R$ ist *maximal*, wenn

(i) $M \neq R$ (M ist echt).

(ii) Ist $I \lhd R$ mit $M \subseteq I \subseteq R$,

dann gilt: $I = M$ oder $I = R$. (Also gibt es keine weiteren Ideale zwischen M und R.)

Proposition
Jedes echte Ideal ist in einem Maximalideal enthalten.

Wir brauchen Zorn's Lemma.

Exkurs **Partielle Ordnung**

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Eine *partielle Ordnung* auf A ist eine Relation $\leq$ auf A mit den Eigenschaften:

(1) $x \leq x$ für alle $x \in A$.

(2) Aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$ für alle $x, y \in A$.

(3) Aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$ für alle $x, y, z, \in A$.

(4) $\leq$ ist *total* falls $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in A$.

Definition

(i) Sei $(A, \leq)$ eine partielle Ordnung und $B \subseteq A$. Ein Element $a \in A$ heißt *obere Schranke* fr B in A, falls $b \leq a$ für alle $b \in B$.

(ii) $m \in A$ heißt *maximal*, wenn gilt: $m \leq x \Rightarrow m = x$ für alle $x \in A$.

Zorn's Lemma

Sei $A \neq 0$ eine partielle Ordnung mit der Eigenschaft: Jede total angeordnete Teilmenge $B \subseteq A$ hat eine obere Schranke in A. Dann hat A ein maximales Element.

Beweis der Proposition

Sei $I \lhd R$, $I \subsetneq R$. Betrachte

$S :=$ die Menge aller echten Ideale von R, die in I enthalten sind.

$I \in S$, so $S \neq \emptyset$.

S ist partiell geordnet durch Mengeninklusion. Wir behaupten, dass jede total geordnete Teilmenge von S eine obere Schranke in S hat. Sei also $\xi \subseteq S$ eine solche. Setze

$$J := \bigcup_{c \in \xi} C$$

J ist Ideal: $0 \in J$. Seien $a, b \in J$, existieren $C_1, C_2 \in \xi$ mit $a \in C_1$ und $b \in C_2$.

Nun gilt $C_1 \subseteq C_2$ oder $C_2 \subseteq C_1$ (weil ξ total geordnet ist).

In jedem Fall ist $a + b \in J$ (weil $a + b \in C_1$ oder $a + b \in C_2$).

Analog zeigt man: $a \in J$ und $r \in R \Rightarrow ra \in J$.

Nun zeigen wir: $J \subsetneq R$, sonst $1 \in J$, also $1 \in C$ für ein geeignetes $C \in \xi$ - Widerspruch, weil $c \in \xi$ echt sein muss.

Anwendung von Zorn's Lemma ergibt:

S hat maximale Elmente. Wenn M ein solches ist, dann ist klar, dass M ein maximales Ideal ist, welches I enthält, wie behauptet. $\square$