

21. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 21. Januar 2013

Satz 1

G ist auflösbar \Leftrightarrow es existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $G^{(k)} = 1$.

Beweis

“ \Leftarrow ” Die Normalreihe $G \triangleright G' \triangleright \dots$ hat abelsche Faktoren.

“ \Rightarrow ” Sei $G = G_1 \triangleright \dots \triangleright G_s \triangleright G_{s+1} = \{1\}$ eine Normalreihe mit abelschen Faktoren G_i/G_{i+1} .

Lemma (20. Vorlesung) $\Rightarrow G_{i+1} \supseteq G'_i$ für alle i .

Behauptung $G_i \supseteq G^{(i)}$ für alle i . Bei $i = 1$ gilt $G = G_1 \supseteq G'$ ✓

Induktionsannahme für k ✓

Induktionsschritt für $k + 1 : G_{k+1} \supseteq (G_k)' \supseteq (G^{(k)})' = G^{(k+1)}$

Da $G_{s+1} = \{1\}$ folgt insbesondere $G^{(s+1)} = \{1\}$ □

Satz 2

Sei G auflösbar.

- (1) Sei $H \leq G$. Dann ist H auflösbar.
- (2) Sei $\eta : G \rightarrow H$ eine surjektive Homomorphie, dann ist H auflösbar.
- (3) **Zusatz:** Sei G eine beliebige Gruppe und $K \triangleleft G$, so dass K und G/K auflösbar sind, dann ist G auch auflösbar.

Beweis

(1) $H \subseteq G \Rightarrow H^i \subseteq G^i$, also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow H^{(k)} = \{1\}$.

(2) $\eta(G^{(i)}) = \eta(G)^{(i)}$ (siehe Proposition 1 (5), 20. Vorlesung). Also $G^{(k)} = \{1\} \Rightarrow \eta(G)^{(k)} = \{1\}$. Also $H^{(k)} = \{1\}$.

(3) Sei $\pi : G \rightarrow G/K$ die kanonische Projektion. Es gilt $\pi(G^{(i)}) = (G/K)^{(i)}$. Nun ist G/K auflösbar $\Rightarrow \exists k$ mit $\pi(G^{(k)}) = (G/K)^{(k)} = \{1\}$, i.e. für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $xK = K$, i.e. für alle $x \in G^{(k)}$ gilt $x \in K$, i.e. $G^{(k)} \subseteq K$. Nun ist aber auch K auflösbar, also existiert ℓ mit $G^{(k+\ell)} = (G^{(k)})^\ell \subseteq K^{(\ell)} = \{1\}$. □

Bemerkungen

1. Eine endliche abelsche Gruppe $G \neq \{1\}$, die einfach ist, ist zyklisch mit Primordnung.

Beweis Da jede Untergruppe normal ist, G aber einfach, folgt daraus, dass die einzigen Untergruppen $\{1\}$ und G sind. Sei $x \neq 1$ mit $x \in G$, also $\langle x \rangle = G$, so ist G zyklisch. Wenn $|G|$ **keine** Primzahl ist, dann gibt es eine Primzahl p mit $p \mid |G|$ und damit $1 < |H| = p < |G|$ - Widerspruch. \square

2. G ist auflösbar und einfach $\Rightarrow G$ ist abelsch.

Beweis $G \triangleright \{1\}$ ist die einzig mögliche Normalreihe. \square

Satz 3

Eine endliche Gruppe ist auflösbar \Leftrightarrow jeder Kompositionsfaktor einer Kompositionsreihe ist zyklisch mit Primordnung.

Beweis

“ \Rightarrow ” G ist auflösbar. Sei $G = G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{s+1} = \{1\}$ eine Kompositionsreihe. Nun ist auch G_i/G_{i+1} auflösbar (siehe Satz 2 Nr. (1) und (2)) und einfach $\Rightarrow G_i/G_{i+1}$ sind abelsch, also zyklisch mit Primordnung (siehe Bemerkungen 1. und 2.).

“ \Leftarrow ” Sei

$$G = G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{s+1} = \{1\} \quad (*)$$

eine Kompositionsreihe (ex. wegen Jordan Hölder) mit G_i/G_{i+1} zyklisch mit Primordnung. Dann ist insbesondere G_i/G_{i+1} abelsch und damit ist die Reihe (*) sogar eine auflösbare Reihe. \square .

Erinnerung

Ex. 4.1 (b) Lineare Algebra II: $n \geq 3$. A_n ist von 3-Zykeln erzeugt.

Satz 4

A_n ist einfach für $n \geq 5$.

Beweis

Sei $K \neq \{1\}$, $K \triangleleft A_n$. Zu zeigen: $K = A_n$.

Behauptung 1 Wenn K ein 3-Zykel enthält, dann enthält K alle 3-Zykeln.

Beweis Sei $(123) \in K$ und (ijk) beliebig.

$$\gamma := \begin{pmatrix} 12345 \cdots \\ ijk lm \cdots \end{pmatrix} \quad \text{Es gilt } \gamma(123)\gamma^{-1} = (ijk) \quad (*)$$

Ohne Einschränkung gilt $\gamma \in A_n$ (sonst ersetze durch $(lm)\gamma$).

Nun ist K normal $\Rightarrow (ijk) \in K$ wegen $(*)$. \square

Behauptung 2 K enthält ein 3-Zykel.

Beweis Sei $\alpha \in K \triangleleft A_n; \alpha \neq 1$ mit maximaler Anzahl von Fixpunkten.

Wir zeigen: α ist ein 3-Zykel, sonst schreibe

(a) $\alpha = (123 \cdots) \cdots$ oder

(b) $\alpha = (12)(34) \cdots$

als Produkt disjunkter Zykeln.

(Beobachte, dass im Fall (a) α noch zwei Zahlen bewegen muss, sonst ist $\alpha = (123k)$ eine ungerade Permutation - Widerspruch.)

Setze $\beta := (345)$ und betrachte $\alpha_1 := \beta\alpha\beta^{-1}$ ($\alpha_1 \in K$, weil $\alpha \in K$ und $K \triangleleft A_n$).

Direktes Rechnen zeigt:

$$\alpha_1 = (124 \cdots) \cdots \text{ im Fall (a) und}$$

$$\alpha_1 = (12)(45) \cdots \text{ im Fall (b).}$$

Auf jeden Fall ist $\alpha_1 \neq \alpha$ und damit $\alpha_2 := \alpha_1\alpha^{-1} \neq 1$. ($\alpha_2 \in K$).

Nun ist jede $\ell > 5$ durch β fixiert. Beobachte, dass falls ℓ auch durch α fixiert ist, ℓ auch durch α_2 fixiert ist.

Direktes Rechnen im Fall (a) zeigt $\alpha_2(2) = 2$ und außerdem bewegt α im Fall 1, 2, 3, 4, 5. Also hat α_2 einen extra Fixpunkt (nämlich 2) und $\alpha_2 \in K$ - Widerspruch.

Direktes Rechnen im Fall (b) zeigt $\alpha_2(1) = 1$ und $\alpha_2(2)2$ - Widerspruch. \square

Korollar

S_n ist **nicht** auflösbar für $n \geq 5$.

Beweis

Sonst wäre A_n auflösbar, aber A_n ist einfach $\Rightarrow A_n$ ist abelsch - Widerspruch. \square