22. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 24. Januar 2013

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Unser nächstes Ziel ist es, die Sylow Sätze zu beweisen (Sonderfälle, für die die Umkehrung von Lagrange gilt).

Sylow 1
Sei G eine endliche Gruppe, p Primzahl und $k \in \mathbb{N}$, so dass $p^k||G|$, dann hat G eine Teilgruppe der Ordnung p^k.

Definition 1
Eine solche Teilgruppe H mit $H = p^m$, m maximal, ist eine *Sylow-p-Untergruppe*.

Sylow 2

(1) Sylow-p-Untergruppen sind konjugiert, das heißt es existiert $a \in G$ mit $H_2 = aH_1a^{-1}$.

(2) Die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ist ein Divisor von $[G : H]$ für eine (jede) Sylow-p-Untergruppe H und ist $\equiv 1 \mod p$.

(3) Jede Untergruppe der Ordnung p^k ist enthalten in einer Sylow-p-Untegruppe.

Für die Beweise der Sylow-Sätze brauchen wir Gruppenaktionen:
Definition 2
Sei G eine Gruppe und S eine Menge ($S \neq \emptyset$).

$$\begin{array}{ccc} G \times S & \to & S \\ (g, x) & \mapsto & gx \end{array}$$

ist eine Abbildung, so dass

(i) $1x = x$ für alle $x \in S$

(ii) $g_1g_2x = g_1(g_2x)$ für alle $x \in S$ und für alle $g_1, g_2 \in G$.

heißt *Gruppenaktion*. Wir sagen G *operiert auf* S.

Definition 3
Sei G operiert auf S und auf S'. Die Aktionen heißen *äquivalent*, wenn es eine Bijektion $v : S \to S'$ gibt pd. $v(gx) = gv(x)$ für alle $g \in G$ und $x \in S$.

Proposition 1
Sei G operiert auf S. Definiere

$$\begin{array}{rccc} T(g): & S & \longrightarrow & S \\ & x & \mapsto & gx \end{array}$$

Dann ist $T(g)$ eine Permutation auf S.

Notation
Sym S bezeichnet die Gruppe der Permutationen von S.

Fortsetzung mit Ansatz von Proposition 1:
Proposition 2
Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} T: & G & \longrightarrow & Sym S \\ & g & \mapsto & T(g) \end{array}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 4
$\ker T \lhd G$ heißt der ker der Aktion. Die Aktion heißt *effektiv*, wenn $\ker T = \{1\}$.

Beispiele

(0) G operiert auf S und $H \leq G \Rightarrow H$ operiert auf S (durch Einschränkung)
G operiert auf S und $\mathcal{O} \subseteq S \Rightarrow G$ operiert auf $\mathcal{O}$ (auch Einschränkung, wenn wohldefiniert!)

(i) $S = G$. Definiere die Aktion “*linke Multiplikation*”:
$(g, x) \mapsto \underbrace{gx}_{\text{Produkt in } G}$ ist eine effektive Aktion.

(ii) Dual dazu “rechte Multiplikation”

(iii) Konjugation: $S = G; (g, x) \mapsto gxg^{-1}$.
Was ist hier der ker dieser Aktion?

$$\begin{array}{rcl} \ker T & = & \{g \mid \ \forall x \in G : gxg^{-1} = x\} \\ & = & \{g \mid \ \forall x \in G : gx = xg\} \\ & := & C_G \end{array}$$

C_G heißt *Zentrum von* G und ist eine normale Untergruppe.

Definition 5
$H \leq$ *Sym* S heißt Permutationsgruppe.

Satz (Cayley)

Jede Grupe ist isomorph zu einer Permutationsgruppe.

Beweis

$S = G$ operiert mit der linken Multiplikation auf G.

$$\begin{aligned} T: \quad G &\longrightarrow Sym\ G \\ g &\mapsto T(g) \end{aligned}$$

hat trivialen $\ker T = \{1\}$. Also $G \simeq T(G) \leq Sym\ G$. $\square$

Äquivalenzrelation durch Aktion induziert

1. Seien $x, y \in S$. Setze $x \underset{G}{\sim} y$, wenn es ein $g \in G$ gibt, pd. $y = gx$.
   $\underset{G}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. $[x] := Gx := \{gx \mid g \in G\}$ heißt die *Orbit* oder *Bahn von x*.
3. $S = \bigsqcup\limits_{x \in S} Gx$.

Beispiele (Fortsetzung)

(i) Sei $H \leq G, S = G$. H operiert durch linke Multiplikation $[x] = Hx = \{hx \mid h \in H\}$ (die Nebenklasse von x).

(ii) G operiert auf G durch Konjugation $[x] = \{gxg^{-1} \mid g \in G\}$ heißt die *Konjukationsklasse*.

Proposition 3

(i) Die Konjugationsklasse von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$.

(ii) Also ist das Zentrum von G die Vereinigung solcher Konjugationsklassen.