23. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 28. Januar 2013

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Definition 1

1. G *operiert transitiv* auf S, wenn es nur eine Bahn gibt, das heißt für alle $x, y \in S : x \underset{G}{\sim} y$.
2. Der *Stabilisator* $Stab_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ ist eine Untergruppe von G für jedes $x \in S$.

Beispiel 1

G operiert auf G durch Konjugation $\Rightarrow$
$Stab_x = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = C(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$

Bemerkung

(i) Wenn $y = ax$, dann ist $Stab_x = a^{-1}(Stab_y)a$.

(ii) Also wenn G auf S transitiv operiert, gilt für alle $x, y \in S$, dass $a \in G$ existiert, so dass $Stab_y = a(Stab_x)a^{-1}$

Beispiel 2

$H \leq G$ operiert transitiv auf $S := \{xH \mid x \in G\}$ mit $g(xH) := (gx)H$.

Beweis

Seien $xH, yH \in S$. Setze $g := yx^{-1}$, dann gilt $gxH = yH$. $\square$

Wir zeigen, dass bis auf Äquivalenz von Aktionen, alle transitive Aktionen so sind.

Satz 1

Es sei G operiert transitiv auf $S \neq \emptyset$. Sei $x \in S$ und $H := Stab_x$. Dann ist die Aktion äquivalent zur Aktion auf $S' := \{gH \mid g \in G\}$.

Beweis

Definierte $\overline{\alpha} : \overline{G} \to S$ mit $\overline{\alpha}(\overline{g}) := gx$, wobei $\overline{g} := \{a \in G \mid ax = gx\} = \{a \in G \mid g^{-1}a \in H\} = gH$ und $\overline{G} := \{\overline{g} \mid g \in G\}$ ist. Die Aktion ist transitiv $\Rightarrow \overline{\alpha}$ surjektiv.

Übungsaufgabe
$\overline{\alpha}$ ist wohldefiniert und bijektiv. Wir müssen noch prüfen, ob $\overline{\alpha}(h\overline{g}) \stackrel{?}{=} h\overline{\alpha}(\overline{g})$.

Korollar 1
Es sei G endlich, operiert transitiv auf S. Dann ist $|S| = [G : Stab_x]$ für ein (jedes) $x \in S$, insbesondere ist S endlich und $|S| \mid |G|$.

Algemeiner können wir ein Resultat für eine beliebige Aktion herleiten:
Korollar 2 (Bahngleichung)
Es sei G endlich operiert auf S endlich. Es gilt $|S| = \sum_{i=1}^{r}[G : Stab_{x_i}]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_r\}$ ein Vertretersystem der Bahnen ist.

Beweis
Seien $\mathcal{O}_1, \ldots, \mathcal{O}_r$ alle Bahnen. Es ist leicht zu sehen, dass die Aktion auf $\mathcal{O}_i$ transitiv ist für jedes $i = 1, \ldots, r$. Also gilt $|\mathcal{O}_i| = [G : STab_{x_i}]$. Nun ist $S = \bigsqcup_{i=1}^{r} \mathcal{O}_i$, also $|S| = \sum |\mathcal{O}_i|$. □

Korollar 3 (Klassengleichung)
Sei G eine endliche Gruppe. Es gilt $|G| = \sum_{i=1}^{k}[G : C(x_i)]$, wobei $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ein Vetretersystem der Konjukationsklassen ist.

Beweis
G operiert auf G durch Konjugation und $Stab_{x_i} = C(x_i)$ in diesem Fall. □

Korollar 4 (Klassengleichung Bis.)
$|G| = |C_G| + \sum_{i=1}^{\ell}[G : C(y_i)]$, wobei $\{y_1, \ldots, y_\ell\}$ ein Vertretersystem für die Konjugationsklassen in G C_G ist.

Beweis
Die Konjugationsklassen von x ist $\{x\}$ genau dann, wenn $x \in C_G$ genau dann, wenn $C(x) = G$. In Korollar 3 wird also in der Formel $1 = [G : G] = [G : C(x_i)]$ so oft summiert wie es Elemente in C_G gibt. Also erhalten wir $|C_G|$ als ersten Summand. □

Korollar 5
Sei G endlich, $|G| = p^k, p$ ist Primzahl und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt $C_G \neq \{1\}$.

Übungsblatt 11, Aufgabe 11.3