24. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 31. Januar 2013

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

§ Beweise der Sylow-Sätze

Beweis von Sylow 1
Induktion nach $|G|$. $|G| = 1$ - klar.
Induktionsannahme: Sylow 1 gilt für alle Gruppen der Ordnung $< |G|$.
Induktionsschritt: Wir werden "Cauchy's Satz" benutzen und Aufgabe 9.4 benötigen.
Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $p||G|$. Dann exisitert ein $x \in G$ mit $|x| = p$. Betrachte die Klassengleichung $|G| = |C_G| + \sum_{y_i \notin C_G} [G : C(y_i)]$ und beachte, dass $C := C_G$ abelsch ist. Zwei Fälle sind zu betrachten:

Fall 1
$p \nmid |C| \Rightarrow \exists j$ mit $p \nmid [G : C(y_j)]$. Aber $p^k \mid |G| = [G : C(y_j)] \mid C(y_j) \mid$. Also $p^k \mid |C(y_j)|$. Nun ist $|C(y_j)| < |G|$, da $y_j \notin C$ ist.
Induktionsannahme $\Rightarrow C(y_j)$ besitzt eine Untergruppe der Ordnung p^k.

Fall 2
$p \mid |C| \Rightarrow$ Cauchy's Satz liefert ein Element c der Ordnung p.
Nun ist $< c > \lhd G, | < c > | = p$. Betrachte die Gruppe $G/ < c >$ der Ordnung $\frac{|G|}{|<c>|} = \frac{|G|}{p}$.
Also $p^{k-1} \mid |\frac{G}{<c>}|$.
Induktionsannahme $\Rightarrow \exists$ eine Untergruppe von $G/ < c >$ der Ordnung p^{k-1}. Nun haben die Untergruppen von $G/ < c >$ die Gestalt $H/ < c >$, wobei $H \leq G$ und $< c > \leq H$.
Also existiert $H \leq G$ mit $|H/ < c > | = p^{k-1}$ und damit ist
$|H| = |H/ < c > | \, | < c > | = p^{k-1}.p = p^k$. $\square$

Beweis von Sylow 2

Wir benötigen eine

Bemerkung

Sei $H \leq G$ und $g \in G$, dann ist gHg^{-1} auch eine $\leq G$. Also haben wir eine Aktion von G auf $\Gamma :=$ die Menge der Untergruppen von G durch Konjugation.

- Für die Aktion berechnen wir $(H \in \Gamma)$ $Stab_H := \{g \in G | gHg^{-1} = H\} := N(H)$ der Normalisator von H ind G.

- Beachte: $H \lhd N(H)$.

- Wir berechnen die Bahnen $\mathcal{O}_H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}, H \in \Gamma$.
  Korollar 1 (23. Vorlesung) liefert $|\mathcal{O}_H| = [G : N(H)]$
  und $[G : H] = [G : N(H)][N(H) : H]$, so ist $|\mathcal{O}_H| \mid [G : H]$.

- Zum Spezialisieren dieser Aktion auf die Mengen $\Pi \subseteq \Gamma$ der Sylow-p-Untergruppen von G. Die Aktion auf Π ist wohldefiniert, weil $gHg^{-1} \in \Pi$, wenn $H \in \Pi$.

Wir bekommen ein:

Hilfslemma

(i) Sei $P \in \Pi, H \leq N(P)$ und $|H| = p^j$, dann ist $H \leq P$. Es folgt:

(ii) P ist eine Sylow-p-Untergruppe von $N(P)$ und die einzige.

Beweis

$$\left.\begin{array}{ll} H \leq N(P) & \text{und} \\ P \lhd N(P) & \end{array}\right\} \Rightarrow HP \text{ ist Untergruppe und } HP/P \simeq H/(H \cap P)$$

(Isomorphie-Satz). Also ist HP/P isomorph zu einer Faktorgruppe von H und damit hat sie die Ordnung $|HP| = p^k$ für ein geeignetes k. Also $|HP| = p^k||P|$. Da aber P eine Sylow-p-Untergruppe ist, müssen wir $k = 0$ haben, i.e. $HP = P$, so dass $H \leq P$. $\square$

Beweis von Sylow 2 - Fortsetzung
Wir betrachten eine Bahn $\sum$.
Fall 1
Sei $P \in \sum$ und betrachte die Atkion von P auf $\sum$. Wir bekommen eine Partition von $\sum$ in P-Bahnen.

- Betrachte die Bahn von P. Die ist offensichtlich $\{P\}$ (weil $xPx^{-1} = P$ für alle $x \in P$).
- Wir behaupten, dass $\{P\}$ die einzige Bahn der Kardinalität 1 ist:
  Sei $\{P'\}$ eine P-Bahn. Dann gilt $xP'x^{-1} = P'$ für alle $x \in P$, das heißt $P \subseteq N(P')$ und Hilfslemma (ii) liefert $P = P'$ (weil P' die einzige Sylow-p-Untergruppe vo$N(P')$ ist und P ist eine Sylow-p-Untergruppe von $N(P')$).
- Beachte, dass jede P-Bahn-Kardinalität eine Potenz von p hat, da diese Kardinalität die Kardinalität $|P|$ teilen muss (siehe Korollar 1, 23. Vorlesung). Also ist $|\sum| \equiv 1 \mod p$.

Dieses beweist die zweite Aussage von Sylow 2 (2).
Nun beweisen wir Sylow 2 (1). Wir zeigen, dass $\sum$ die einzige Bahn ist, sonst gibt es $P \in \Pi$ mit

Fall 2
$P \notin \sum$. Betrachte wieder die Aktion von P auf $\sum$. Analog wie Fall 1 sehen wir, dass es überhaupt keine P-Bahnen der Kardinalität 1 gibt (die einzige Möglichkeit, nämlich $\{P\}$ scheidet nun aus, weil $P \notin \sum$ ist).
Also ist $|\sum| \equiv 0 \mod p$ - Widerspruch.
So $\sum = \Pi$ und damit ist (1) bewiesen.

Also ist $|\Pi| = [G : N(P)]$ für alle $P \in \Pi$ (Korollar 1, 23. Vorlesung). Also ist die Anzahl der Sylow-p-Untergruppen ein Divisor.
Das beweist die erste Aussage in Sylow (2).

Nun beweisen wir Sylow 2 (3)
Sei $H \leq G, |H| = p^k$. Betrachte die Aktion von H auf Π. Die H-Bahnen haben Kardinalität ein Divisor von $|H|$ (Korollar 1, 23. Vorlesung), also haben die H-Bahnen-Kardinalität eine Potenz von p.
Nun ist aber $|\Pi| \equiv 1 \mod p$, also gibt es eine H-Bahn $\{P\}$ mit nur einem Element, das heißt $H \leq N(P)$ und damit $H \leq P$ (Hilfslemma (i)). $\square$