4. Script zur Vorlesung: Algebra (B III)

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Lorna Gregory, Katharina Dupont

WS 2012/2013: 5. November 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 28. Januar 2016)

Behauptung
$D^{-1}R$ ist ein Ring mit Null $\frac{0}{1}$ und Eins $\frac{1}{1}$.

Beweis
Wir zeigen zum Beispiel, dass die Addition wohldefiniert ist.
Zu zeigen: $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$.

Seien

$$\begin{array}{ccc}
\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} & \text{und} & \frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
ab' = a'b & & cd' = c'd \\
(ad+bc)b'd' & \stackrel{?}{=} & (a'd'+b'c')(bd) \\
\text{berechne} & & \text{berechne} \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\underline{ab'}dd' + \underline{\underline{cd'}}bb' & = & \underline{a'b}dd' + \underline{\underline{c'd}}bb'
\end{array}$$

usw.... $\square$

Behauptung
Die Abbildung

$$\begin{array}{cccc}
i: & R & \to & D^{-1}R \\
 & r & \mapsto & \frac{r}{1}
\end{array}$$

definiert einen injektiven Ringhomomorphismus.

Beweis
$i(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r}{1} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow r = 0$ $\square$

Behauptung
$i(D) \subset (D^{-1}R)^{\times}$.

Beweis
$d \in D$; $i(d) = \frac{d}{1}$ und damit $[i(d)]^{-1} = \frac{1}{d}$ $\square$

Definition
$D^{-1}R$ ist der Ring von Brüchen.

Beispiel 1
R ist integer $\Rightarrow D := R\backslash\{0\}$ erfüllt $(*)$ und so ist $D^{-1}R$ ein Körper, den wir mit Quot (R) bezeichnen.
Wir identifizieren R mit $i(R)$ (i.e. r mit $\frac{r}{1}$ für alle $r \in R$).
Wir haben erreicht: Jeder Integritätsbereich lässt sich in einen Körper einbetten.
(Erinnerung: Ein injektiver Ringhomomorphismus heißt eine Einbettung.)

Korollar
Der Ring R läßt sich in einen Körper einbetten genau dann, wenn er integer ist.

Beispiel 1
(a) Quot $(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

(b) Quot $(K[x]) := K(x)$

der rationale Funtkionenkörper einer Variablen über den Körper K.

Beispiel 2
P ist ein Primideal; $D = R \setminus P$.
$R_P = D^{-1}R$ ist die Lokalisierung von R nach P.

Zu Beispiel 1 (b): Polynomringe über Ringe
Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

$R[x] := \{p(x) \mid p(x) \text{ Polynom über } R\}$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a, x + a_0$

$n \in \mathbb{N}_0 \left[\begin{array}{lcl} 0 \neq a_n & := & \text{Leitkoeffizient} \\ \deg p & := & n \end{array} \right.$

Addition: Kooridnatenweise (koeffizientenweise)
Multiplikation: Wenn
$p(x) = \sum a_i x^i$ und $q(x) = \sum b_j x^j$,
so ist der Koeffizient von x^k im Produkt $p(x)q(x)$ gleich $\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Bemerkungen:
$R \subseteq R[x]$ als Teilring der konstanten Polynome (i.e. Polynome p mit $\deg p = 0$).

Frage
Wann ist $a_m b_m$ Leitkoeffizient vom Produkt $p(x)q(x)$?

Korollar

R ist integer genau dann, wenn $R[x]$ integer ist.

Beweis

"$\Leftarrow$" Ein Teilring von einem Integritätsbereich ist integer.

"$\Rightarrow$" Sei $a_n \neq 0$ und $b_m \neq 0$ für $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_o$ und $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_o$, dann ist $a_n b_m \neq 0$, weil R integer ist (und damit ist auch $\deg p(x)q(x) = n + m$). Insbesondere ist $p(x)q(x)$ nicht das Nullpolynom. $\square$

Beispiel

Sei R ein Ring. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rccccl} ev_0 : & R[x] & \twoheadrightarrow & R & & \\ & p(x) & \mapsto & p(0) & = & \text{der konstante Term von } p(x). \end{array}$$

Dann ist ev_0 ein surjektiver Ringhomomorphismus mit $\ker ev_0 :=$ die Menge der Polynome mit konstantem Term gleich Null.

Also ist $R[x]/ < x > \backsimeq R$, wobei $\ker ev_0 =< x >= \{xf(x); f(x) \in R[x]\}$

Sei nun $R = \mathbb{Z}$, so ist $\mathbb{Z}[x]/ < x > \backsimeq \mathbb{Z}$.

Wir sehen also: $< x >$ ist ein Primideal in $\mathbb{Z}[x]$, aber ist nicht maximal !