Universität Konstanz
Fachbereich
Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Algebra
Übungsblatt 2

Alle Ringe seien kommutativ mit Eins.
Aufgabe 2.1

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $U(n)$ die Menge der Einheiten von $\mathbb{Z}_n$. Die eulersche Phi-Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $\phi(1) := 1$ und für $n > 1$ $\phi(n) := |U(n)|$. Zeigen Sie:

(i) für jede Primzahl p und jedes $\nu \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(p^\nu) = p^\nu - p^{\nu-1}$

(ii) für alle $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ gilt $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$

(iii) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\phi(n) = n \prod_{p|n,\ p \text{ prim}} (1 - \frac{1}{p})$$

(b) Geben Sie ein Beispiel für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\phi(ab) \neq \phi(a)\phi(b)$.

Aufgabe 2.2
Sei R ein Ring.
(a) Seien $I, J \lhd R$ Ideale von R. Zeigen Sie, dass

$$I + J := \{a + b \mid a \in I \text{ und } b \in J\}$$

das kleinste Ideal von R ist, welches $I \cup J$ enthält.

(b) Seien $I, J \lhd R$ Ideale von R. Zeigen Sie, dass

$$IJ := \{ \sum_{1 \leq i \leq n} a_i b_i \mid n \in \mathbb{N},\ a_i \in I \text{ und } b_i \in J \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

ein Ideal von R ist und $IJ \subseteq I \cap J$. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und Ideale $I, J \lhd R$ mit $IJ \neq I \cap J$ an. Zeigen Sie, dass $I \cap J = IJ$ gilt, falls $I + J = R$ ist.

(c) Sei $I \lhd R$ ein Ideal von R. Wir definieren durch induction $I^1 := I$ und $I^{n+1} := II^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Folgern Sie, dass I^n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Ideal von R ist und $I^n \subseteq I$ gilt.

(d) Sei $I \lhd R$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rad}(I) := \{a \in R \mid \exists\ n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in I\}$$

ein Ideal von R ist.

(e) Sei $\mathcal{I}$ eine Menge und für $i \in \mathcal{I}$ sei $I_i \lhd R$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass $\cap_{i\in\mathcal{I}} I_i$ ein Ideal von R ist.

(f) Seien $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ Ideale von R. Zeigen Sie, dass $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ ein Ideal von R ist.

Aufgabe 2.3

(a) Sei R ein Ring. Seien S ein Unterring und $I \lhd R$ ein Ideal von R. Zeigen Sie, dass:

  (i) $S + I := \{s + i \mid s \in S \text{ und } i \in I\}$ ein Unterring von R ist

  (ii) $S \cap I$ ein Ideal von S ist

  (iii) I ein Ideal von $S + I$ ist

(b) Seien $j : S \to S + I$ die Einbettung von S nach $S + I$ (also $j(s) := s$) und $\pi : S + I \to \frac{S+I}{I}$ der kanonische Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $\ker(\pi j) = S \cap I$. Folgern Sie, dass $\frac{S+I}{I}$ und $\frac{S}{S\cap I}$ isomorph sind.

(c) Seien R ein Ring und $I, J \lhd R$ Ideale mit $I \subseteq J$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\tau : R/I \to R/J$ definiert durch $r + I \mapsto r + J$ wohldefiniert und ein Homomorphismus ist. Zeigen Sie, dass

$$\frac{R/I}{J/I} \quad \text{und} \quad \frac{R}{J}$$

isomorph sind.

Aufgabe 2.4
Seien R ein Ring und $I \lhd R$ ein Ideal von R. Sei $\phi : R \to R/I$ der kanonische Homomorphismus.

(a) Seien $\mathcal{R}_{R,I}$ die Menge der Unterringe von R, die I enthalten und $\mathcal{R}_{R/I}$ die Menge der Unterringe von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi^* : \mathcal{R}_{R,I} \to \mathcal{R}_{R/I},\ \phi^* : S \mapsto \phi(S)$$

bijektiv und inklusionserhaltend ist.

(b) Seien $\mathcal{I}_{R,I}$ die Menge der Ideale von R, die I enthalten und $\mathcal{I}_{R/I}$ die Menge der Ideale von R/I. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi^* : \mathcal{I}_{R,I} \to \mathcal{I}_{R/I},\ \phi^* : J \mapsto \phi(J)$$

bijektiv und inklusionserhaltend ist.

Aufgabe 2.5
Sei R ein Ring. Sei M eine multiplikative Untermenge mit $0 \notin M$ (d.h. für $a, b \in M$ gilt $ab \in M$ und $1 \in M$). Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein echtes Ideal $I \lhd R$, das maximal ist mit der Eigenschaft $I \cap M = \emptyset$.

(b) Jedes solche I ist prim.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Zorn.

Aufgabe 2.6
Sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass jeder K-Vektorraum V mit $V \neq \{0\}$ eine Basis hat.

(b) Sei V ein K-Vektorraum mit $V \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass jede erzeugende Untermenge von V eine Basis für V enthält.

Hinweis: Benutzen Sie das Lemma von Zorn.

Abgabe **Montag, 12.11.2012** bis 12.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
