17. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 16. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Dezember 2015)

Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

Beispiel 1
(i) $T = 0$.

(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identität

Beispiel 2 $V :=$ Polynomiale Funktionen über K.
$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$

$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \cdots + kc_kx^{k-1}$
Ableitung Operator.

Beispiel 3 Sei A eine $m \times n$-Matrix über K.

(a) $T : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$
$T(X) := AX$

(b) $U : K^m \to K^n$
$U(\alpha) = \alpha A$

Beispiel 4 P ist eine $m \times m$-Matrix; Q ist eine $n \times n$-Matrix.
$T : K^{m\times n} \to K^{m\times n}$

$T(A) := PAQ$ ist ein linearer Operator.

Beispiel 5 $V = \{f; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$T : V \to V$
$f \mapsto Tf$, wobei $(Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung Lineare Abbildungen erhalten l. K.: $T(\sum_{j=1}^n c_j\alpha_j) = \sum_{j=1}^n c_jT(\alpha_j)$.

Satz 1 Sei V ein endlich dim Vektorraum über K. Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V. Seien $\beta_1, \dots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.
Es existiert ein einziges $T : V \to W$ lineare Transformation mit $T(\alpha_j) = \beta_j$ für alle $1 \leq j \leq n$. $(*)$

Beweis Existenz: Sei $\alpha \in V$. $\alpha = \sum x_j \alpha_j$.
Definiere $T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$. Insbesondere ist $(*)$ erfüllt.
Ist T linear?
Sei $\gamma = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n$ und sei $c \in K$. Man hat:
$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\alpha_n$. Also

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \cdots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \cdots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$$

$$= (cx_1\beta_1 + \cdots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n)$$

$$= c(x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \cdots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \to W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$.
Zu zeigen: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.

Berechne:
$U(\alpha) = U(\sum c_j\alpha_j) = \sum c_j U(\alpha_j) = \sum c_j T(\alpha_j) = T(\sum c_j\alpha_j) = T(\alpha)$. □

Bemerkung 1 Wir haben gezeigt:

(1) $T, U : V \to W$ lineare Transformation. Es gilt: $T = U$ genau dann, wenn $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ für alle $1 \le j \le n$ für eine geordnete Basis $\{\alpha_j; 1 \le j \le n\}$ von V.

(2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 6 $V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & (1,2) \\ \alpha_2 & = & (3,4) \end{array}\right\} \text{Basis für } V.$$

$\beta_1 = (3,2,1)$
$\beta_2 = (6,5,4)$

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
$T(1,2) = (3,2,1)$
$T(3,4) = (6,5,4)$

$T(e_1) =?$
$e_1 = (1,0) = (-2)(1,2) + (3,4)$
$T(e_1) = (-2)(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2)$.

Beispiel 7 (mehr dazu in Abschnitt 3.4)

$T : K^m \to K^n$ ist eindeutig bestimmt durch $T(e_i) := \beta_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $\beta_i \in K^n$.

Sei $\alpha = (x_1, \ldots, x_m) \in K^m$. $T(\alpha) = x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m$.

$$\text{Setze } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ T(e_m) \end{pmatrix} m \times n\text{-Matrix.}$$

Beisp., Forts. Berechne:
$$\underset{1\times m}{\alpha B = (x_1 \cdots x_m)} \underset{m \times n}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}} = \underset{1 \times n.}{x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m.}$$

Also $T(\alpha) = \alpha B$.

Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 8 Sei $T : V \to W$ eine lineare Tansformation.

(1) $T(V) := R_T = \{T(\alpha); \alpha \in V\}$

$= \{w \mid w \in W$ und es existiert ein $\alpha \in V$ mit $T(\alpha) = w\}$
ist ein Unterraum von W.

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V$ und $T(\alpha) = 0\}$.

$N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V.

Beweis (1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T$?

$\beta_1 = T(\alpha_1) \qquad \beta_2 = T(\alpha_2)$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$.

$T(0) = 0 \in R_T$. Also $R_T \neq \emptyset$. R_T ist ein Unterraum.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$. Also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$. Auch $0 \in N$, so dass $N \neq \emptyset$. □

Definition Sei V endlich dim; $T : V \to W$ eine lineare Transformation.
rang $(T) := \dim R_T$.