

22. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 20. Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Bemerkung 1 $W = K^1$ ist ein K -Vektorraum. $\dim(W) = 1$. Die Standard-Basis ist $\{1\}$.
 $W' \subseteq V$ ist ein Unterraum $\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = V$. Also $\dim W' = 0$ oder
 $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ genau dann, wenn $W' \neq \{0\}$.

Definition 1 $f \in L(V, K)$ heißt ein *lineares Funktional*.

Beispiel 1 $V = K^n$; \mathcal{E} ist die Standard-Basis. Sei $(a_1, \dots, a_n) \in V$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ (*)

Es gilt $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E}, \{1\}} = [a_1, \dots, a_n]$. Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$.
 Setze $a_j := f(\mathcal{E}_j)$, dann erfüllt f (*) für (a_1, \dots, a_n) .

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis.
 Sei $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. (*)

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B}, \{1\}} = [[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \mid \dots \mid [f(\alpha_n)]_{\{1\}}] =$
 $([a_1]_{\{1\}} \mid \dots \mid [a_n]_{\{1\}}) = [a_1, \dots, a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze $a_i = f(\alpha_i)$, dann ist f wie in (*).

Beispiel 2 $V = K^{n \times n}$; $tr : V \rightarrow K$
 $tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ ist ein lineares Funktional.

Beispiel 3 Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = C([a, b]) := \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ stetig}\}$.
 Setze $f(g) := \int_a^b g(t) dt$ für $g \in V$. Dann gilt $f \in L(V, \mathbb{R})$.

Definition und Notation 2 $V^* = L(V, K)$ heißt der *Dualraum*. Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 2 $\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ für V werden wir nun eine Basis \mathcal{B}^* von V^* zuordnen. Satz 1 in der Vorlesung 17 liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$.

Behauptung $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für V^* . Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis Für $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ mit $c_i \in K$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \quad (**)$$

Insbesondere wenn $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0$ für alle j , d.h. $c_j = 0$ für alle j . \square

Definition 3 $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt die *Dualbasis* zu \mathcal{B} .

Satz 1 Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V . Es existiert genau eine (Dual)Basis $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ für V^* . Es gelten

$$(1) f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

$$(2) \text{ und } f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i \text{ für alle } f \in V^*$$

$$(3) \text{ und } \alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i \text{ für alle } \alpha \in V.$$

Das heißt für alle $f \in V^*$ und für alle $\alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

Beweis (1) Ergibt sich.

$$(2) f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i \text{ und } (**) \text{ liefert } c_j = f(\alpha_j) \text{ für alle } j = 1, \dots, n.$$

$$(3) \text{ Analog: } \alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j. \quad \square$$

Bemerkung 3 (3) beschreibt f_i als die “ i -te Koordinatenfunktion bezüglich der Basis \mathcal{B} ”.

$$f_i : V \rightarrow K; \alpha \mapsto \text{die } i\text{-te Koordinate in } [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Bemerkung 4 $f \in V^*; f \neq 0; \text{Im}(f) \subseteq K$ ist ein Unterraum; $\text{Im}(f) \neq \{0\}$, also ist $\text{Im}(f) = K$ (Bemerkung 1). Es gilt $\dim(\text{Im} f) = R_f = 1$. Der Dimensionssatz impliziert nun $\dim \ker(f) + 1 = n$, also $\dim \ker(f) = n - 1$ (wobei $n := \dim V$).

Definition 4 Sei $\dim(V) = n$ und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim W = n - 1$, dann heißt W *Hyperraum* (oder *Hyperebene* oder Unterraum der *Kodimension 1*).

Bemerkung 4 besagt, dass wenn $f \in V^*$ und $f \neq 0$, dann gilt, dass $\ker(f) \subseteq V$ ein Hyperraum ist. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.