

Inhaltsverzeichnis zur Vorlesung: Lineare Algebra I**Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl****WS 2015/2016****Kapitel 1 Lineare Gleichungen**

§ 1	Körper	1.-4. Vorlesung
§ 2	Lineare Gleichungssysteme	4.-5. Vorlesung
§ 3	Matrizen	5.-6. Vorlesung
§ 4	Homogene Systeme	7. Vorlesung
§ 5	Matrixprodukt	7. Vorlesung
§ 6	Elementare Matrizen	8.-10. Vorlesung

Kapitel 2 Vektorräume

§ 1	Definitionen und Beispiele	10. Vorlesung
§ 2	Unterraum	11. Vorlesung
§ 3	Basis und Dimension	12.-13. Vorlesung
§ 4	Koordinaten	14.-15. Vorlesung
§ 5	Zeilenraum	16. Vorlesung

Kapitel 3 Lineare Abbildungen

§ 1	Definitionen und Beispiele	17.-18. Vorlesung
§ 2	Die Algebra $L(V, W)$	18. Vorlesung
§ 3	Invertierbarkeit	19. Vorlesung
§ 4	Matrix-Darstellung	20.-21. Vorlesung
§ 5	Lineare Funktionale und Dualraum	22.-24. Vorlesung
§ 6	Das Bidual	24.-25. Vorlesung
§ 7	Die Transponierte	25.-26. Vorlesung
§ 8	Quotientenraum	26.-27. Vorlesung

1. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
 Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
 WS 2011/2012: 18. Oktober 2011
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 3. November 2015)

Kapitel 1: § 1 Körper

Definition (i) Eine *Verknüpfung* (oder binäre Operation) (auf einer Menge G) ist eine Funktion:

$$* : G \times G \rightarrow G.$$

Bezeichnung $*(g, h) := g * h$

(ii) Sei $G \neq \emptyset$.

Das Paar $(G, *)$ ist eine *Gruppe*, wenn

Assoziativ - $(g * h) * k = g * (h * k) \quad \forall g, h, k, \in G$

Neutrales Element - $\exists e \in G$ s.d.
 $e * g = g = g * e \quad \forall g \in G$

Ex. von Inversen - $\forall g \in G \exists h \in G$ s.d.
 $g * h = e = h * g$

NB: Eindeutigkeit von neutralem Element und Inversen; siehe ÜB.

Kommutativ - $g * h = h * g \quad \forall h, g$
 oder abelsch

Bezeichnung $\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen, \mathbb{Q} (rationale),
 $\mathbb{R} :=$ Menge der reellen Zahlen.

Beispiel I) $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +)$
 II) $(\mathbb{Q}^\times, \cdot), (\mathbb{R}^\times, \cdot)$

Bezeichnung $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

III) $F := \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$
 Verknüpfung: $f, g \in F$ definiere $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 $(f + g)(r) := f(r) + g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Neutrales $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $Z(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Inverse $-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(-f)(r) := -(f(r)) \quad \forall r \in \mathbb{R}.$

Dies sind abelsche (siehe Übungsblatt für nicht abelsche) und unendliche Gruppen. Wir konstruieren nun Beispiele von endlichen Gruppen.

Bezeichnung $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen
 $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}.$

$\mathbb{Z} :=$ die Menge der ganzen Zahlen

Divisionsalgorithmus:

Seien $a, b, \in \mathbb{Z}; b > 0. \exists! q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < b$ und $a = bq + r.$

Beweis Betrachte zunächst den Fall $a > 0.$ Falls $0 < a < b$ setze $q := 0$ und $r := a,$ sonst $a \geq b.$ Betrachte die Menge $S := \{s \in \mathbb{N}; sb \leq a\}.$ $1 \in S$ also $S \neq \emptyset;$ und S ist endlich. Setze $q := \max S$
 $r := a - qb$ (also $r = 0$ gdw $a = qb$)

Behauptung $\underbrace{0 \leq r < b}_{r \geq 0}$
gilt per Definition.

Widerspruchsbeweis:

Wenn $r \geq b,$ dann $a - qb \geq b$ i.e. $a \geq qb + b$ i.e. $a \geq (q + 1)b,$ also $q + 1 \in S$ aber $q + 1 > q.$ - Widerspruch.

Eindeutigkeit $\left. \begin{array}{l} a = q_1 b + r_1 \\ a = q_2 b + r_2 \end{array} \right\} \quad (\dagger).$

Also von $(\dagger) : 0 = (q_2 - q_1)b + (r_2 - r_1).$

Widerspruchsbeweis:

Wenn $r_1 > r_2,$ dann $(r_1 - r_2) > 0.$ Also ergibt sich aus $(\dagger) :$

$$0 < (r_1 - r_2) = \underbrace{(q_2 - q_1)b}_{b > 0} \quad (*)$$

Also $(q_2 - q_1) > 0.$ Also $(q_2 - q_1)b \geq b.$

Andererseits: $r_1 < b$ und $r_2 < b$ also $(r_1 - r_2) < (b - r_2) \leq b.$

Mit $(*)$ erhält man einen Widerspruch: linke Seite in $(*) : < b;$ rechte Seite in $(*) : \geq b.$ - Widerspruch.

Also $r_1 = r_2$ und mit (\dagger) bekommt man auch $q_1 = q_2.$ Sei nun $c \in \mathbb{Z}, c \leq 0.$ Wenn $c = 0,$ setze $q := 0$ und $r := c, c = 0 = 0b + 0.$ Wenn $c < 0,$ setze $a := (-c),$ dann ist $a > 0.$ Also $\exists! q, r$ mit $0 \leq r < b$ und $a = bq + r.$

$$\begin{aligned} r = 0 &\Rightarrow c = -a = b(-q) \\ r \neq 0 &\Rightarrow c = -a = b(-q) + (-r) \\ &= b(-q) - b + (b - r) \\ &= b(-q - 1) + (b - r) \\ &= b[-(q + 1)] + \underbrace{(b - r)}_{0 < r < b} \end{aligned}$$

$$\text{also } 0 > -r > -b$$

$$\text{also } b > (b - r) > 0. \quad \square$$

2. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 21. Oktober 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 3. November 2015)

Aus Divisionsalgorithmus: Sei $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$. $\mathbb{Z}_n := \{0, \dots, n-1\}$ ist die Menge der "Reste" für die Division durch n .

Bezeichnung $a \in \mathbb{Z}$; $\bar{a} :=$ Rest der Division von a durch n .

i.e. $a = qn + \bar{a} \quad 0 \leq \bar{a} < n$

i.e. mit $\bar{a} \in \{0, \dots, n-1\}$.

Wir definieren eine Verknüpfung:

Für $x, y \in \mathbb{Z}_n$ definiere $x +_n y := \overline{x + y}$.

Behauptung $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

Fall 1 $n = 1 \quad \mathbb{Z}_n = \{0\}$ die *triviale* Gruppe.

Fall 2 Sei $n \geq 2$. Die Verknüpfung ist wohldefiniert.

Kommutativ? Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n$. $x +_n y = y +_n x$?

L.S. berechnen:

$$x +_n y \quad = \quad \overline{x + y} \quad = \quad \overline{y + x} \quad = \quad y +_n x$$

Def. von $+_n$ weil $(\mathbb{Z}, +)$ Def. von $+_n$
abelsche Gruppe

Assoziativ? Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$.

$$(x +_n y) +_n z \quad = \quad x +_n (y +_n z)$$

?

Berechne L.S.:

Setze $\overline{x + y} = r_1$ und $\overline{r_1 + z} := r_2$.

Also $x + y = q_1n + r_1$, und $r_1 + z = q_2n + r_2$.

Also $(x + y) + z = (q_1 + q_2)n + r_2$. (*)

Berechnung der R.S.:

Setze $\overline{y + z} := r_3$ und $\overline{x + r_3} := r_4$.

Also $y + z = q_3n + r_3$ und $x + r_3 = q_4n + r_4$.

Also $x + (y + z) - q_3n = q_4n + r_4$.

Also $x + (y + z) = (q_3 + q_4)n + r_4$. (**)

Nun vergleiche (*) und (**) und beachte, dass $(x + y) + z = x + (y + z)$ in \mathbb{Z} .

$$\begin{aligned} \text{Also } (x + y) + z &= (q_1 + q_2)n + r_2 = \\ x + (y + z) &= (q_3 + q_4)n + r_4 \end{aligned}$$

Eindeutigkeit von Rest im Divisionsalgorithmus $\Rightarrow r_2 = r_4$

i.e. $\overline{\overline{x + y} + z} = \overline{\overline{x} + \overline{y + z}}$

i.e. $(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$ wie erwünscht.

- Ex. von neutralem Element $0 \in \mathbb{Z}_n$. Sei $x \in \mathbb{Z}_n$.

$$x +_n 0 \stackrel{?}{=} x$$

$$x +_n 0 = \overline{x + 0} = \bar{x}.$$

Aber für $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt $\bar{x} = x$. Also $x +_n 0 = x$.

- Ex. von additiven Inversen.

Sei $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Falls $x = 0$, setze $-x = 0$.

Sei nun $x \neq 0$ und setze $-x := (n - x) \in \mathbb{Z}_n$.

Es gilt $x +_n (-x) = \overline{x + (-x)} = \bar{n} = 0$ wie erwünscht.

Definition 1 Ein Tripel $(R, +, \cdot)$ ist ein *Ring mit Eins*, falls:

- R ist eine nichtleere Menge und
- $+, \cdot$ sind Verknüpfungen auf R und
- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$ und (R, \cdot) ist ein Monoid, d.h.
- \cdot ist assoziativ und es existiert $1 \in R$ mit $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \forall x \in R$ und
- $1 \neq 0$ und
- die Distributivitätsgesetze gelten:

Links $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \forall x, y, z \in R$ und

Rechts $(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \forall x, y, z \in R$

Definition 2 Ein Ring $(R, +, \cdot)$ ist *kommutativ* falls $x \cdot y = y \cdot x \forall x, y \in R$.

Beispiele $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot).$

Gibt es endliche Beispiele?

Auf \mathbb{Z}_n definieren wir: $x \cdot_n y := \overline{xy}$.

Übungsaufgabe: Prüfe, dass für $n > 1$ $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist.

Bezeichnung $F^\times := F \setminus \{0\}.$

Definition 3 $(F, +, \cdot)$ ist ein *Körper*, falls $F \neq \emptyset$, $(F, +)$ und (F^\times, \cdot) abelsche Gruppen sind mit 0 bzw. 1 als neutrale Elemente, $1 \neq 0$ und die Distributivitätsgesetze gelten.

Bemerkung Also $(F, +, \cdot)$ ist ein Körper, falls $(F, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist und alle $x \in F^\times$ sind *multiplikativ invertierbar*, d.h. $\exists X^{-1} \in F^\times$ mit $x \cdot X^{-1} = 1$.

Beispiele $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und später $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.

Frage Gibt es endliche Körper? Insbesondere betrachten wir nun die Frage:
Ist der Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Körper?
Wir werden zeigen: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein Körper, genau dann, wenn $n = p$ Primzahl.

3. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 25. Oktober 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 5. November 2015)

Am Freitag, 21.10.2011, haben wir gesehen, dass für $n > 1$ $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist. Wir wollen nun zeigen, dass $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ein Körper ist, genau dann, wenn $n = p$ eine Primzahl (Definition siehe unten) ist.

“ \Rightarrow ”:

Lemma 1 Jeder Körper ist ein Integritätsbereich, d.h. aus $xy = 0$ folgt $x = 0$ oder $y = 0$, $\forall x, y$.

Beweis Sei $xy = 0$ und $x \neq 0$. Also $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$, d.h. $(x^{-1}x)y = 1 \cdot y = y = 0$.
□

Bemerkung Hier haben wir benutzt:
 $\forall z(z \cdot 0) = 0$. (Übungsaufgabe).

Sei nun $n > 1$. Wir zeigen:

Korollar 1 Sei $n > 1$, $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ Körper $\Rightarrow n = p$ ist eine Primzahl.

Beweis Annahme: n ist *keine* Primzahl. Also $n = xy$ mit $1 < x < n, 1 < y < n$.
Also $x, y, \in \mathbb{Z}_n, x \neq 0, y \neq 0$, aber $x \cdot_n y = \overline{xy} = 0$. Also ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ *kein* Körper. □

“ \Leftarrow ”:

Wir wollen nun zeigen, dass $n = p$ Primzahl $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

Dafür wollen wir explizit die multiplikativen Inversen berechnen: Der Euklidische Algorithmus.

Definition 1

- (i) (positive) Divisoren
 $a, b \in \mathbb{Z}; b > 0; a = bq + r$. Falls $r = 0$: b teilt a ; Bezeichnung: $b \mid a$.
 b ist ein *Divisor von* a oder a ist ein *Vielfaches von* b .
- (ii) $p \in \mathbb{N}$ (also $p > 1$) ist eine Primzahl, falls 1 und p die einzigen (positiven) Divisoren von p sind.
- (iii) $\mathbb{N} \ni d$ ist ein *gemeinsamer Teiler* von a und b falls $d \mid a$ und $d \mid b$ (schreibe: d ist $gT(a, b)$).
- (iv) $\mathbb{N} \ni d$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b (Bezeichnung: $d = ggT(a, b)$), falls d gemeinsamer Teiler und d die größte natürliche Zahl mit dieser Eigenschaft ist.

Bemerke: Die Menge der gemeinsamen Teiler zweier Zahlen a und b mit $b \neq 0$ enthält stets die 1, ist also nicht leer und außerdem durch das Maximum von a und b nach oben beschränkt. Also existiert zu je zwei solchen Zahlen der größte gemeinsame Teiler.

Äquivalent:

$\forall d' : d' \in \mathbb{N}$ und d' gemeinsamer Teiler von a und b gilt: $d' \mid d$.

Der Euklidische Algorithmus (zum Berechnen von $ggT(a, b)$):

$a, b \in \mathbb{Z}; b > 0; b \mid a \Rightarrow ggT(a, b) = b$

sonst:

$$\begin{array}{rcl} a = b q_1 + r_1 & 0 < r_1 < b \\ b = r_1 q_2 + r_2 & 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2 q_3 + r_3 & 0 < r_3 < r_2 \\ \vdots & & \end{array}$$

Rekursion (ρ)

$$\begin{array}{rcl} r_{j-1} & = & r_j q_{j+1} + r_{j+1} \quad 0 < r_{j+1} < r_j \\ \vdots & & \\ r_{n-3} & = & r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1} \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2} \\ r_{n-2} & = & r_{n-1} q_n + r_n \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\ n \text{ maximal} & \text{mit} & r_n \neq 0 \end{array}$$

Absteigende Folge von natürlichen Zahlen *muss* anhalten nach $0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < b$ endlich vielen Schritten.

Behauptung $r_n = ggT(a, b)$

Die Behauptung folgt aus:

Lemma 1 $a = bq + r \Rightarrow ggT(a, b) = ggT(b, r)$

Beweis Setze $d := ggT(b, r)$

(1) $d \mid b$ und $d \mid r \Rightarrow d \mid a$ also d ist $gT(a, b)$

(2) Ferner $d' \mid a$ und $d' \mid b \Rightarrow d' \mid a - bq$ i.e. $d' \mid r$. Also $d' \mid d$.
Also $d = ggT(a, b)$ wie behauptet. □

Und ferner in (ρ):

Bemerkung 1 $r_n = ggT(r_{n-1}, r_{n-2})$ weil

$$\left. \begin{array}{l} r_n \mid r_{n-1} \\ \text{und} \\ r_n \mid r_n \end{array} \right\} \Rightarrow r_n \mid r_{n-2}$$

und $d' \mid r_{n-1}, d' \mid r_{n-2} \Rightarrow d' \mid (r_{n-2} - r_{n-1}q_n)$, i.e. $d' \mid r_n$

Also (in (ρ)): $ggT(a, b) = ggT(b, r_1) = ggT(r_1, r_2) = \dots = ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_n$.

Definition 2 Eine lineare Kombination von a und b (über \mathbb{Z}) ist eine ganze Zahl γ der Gestalt:
 $\gamma := \alpha a + \beta b$ wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 2 Wir haben ständig die folgende Tatsache benutzt:
 $d' \mid a$ und $d' \mid b \Rightarrow d'$ teilt jede lineare Kombination von a und b .

Beweis $\gamma = \alpha d' a' + \beta d' b' = d'(\alpha a' + \beta b')$ □

Bemerkung 3 Rückwärts EA:
 $ggT(a, b) = r_n$ ist eine lineare Kombination (über \mathbb{Z}) von a und b :
 Rekursion:
 $r_n = \boxed{r_{n-2}} - \boxed{r_{n-1}} q_n$. Aber hier werden nur r_{n-1}, r_{n-2} benötigt.

$$r_{n-1} = r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}$$

$$\text{Also } r_n = r_{n-2} - [r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-1}] q_n.$$

Hier werden nur r_{n-2}, r_{n-3} benötigt.

Verfahre so weiter.

Für numerische Beispiele und Berechnungen siehe Übungsblatt.

Bemerkung 4 $ggT(a, b) = ggT(b, a)$ ($a, b > 0$).

4. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 28. Oktober 2011
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 3. November 2015)

Korollar 2 $n = p$ ist eine Primzahl $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

Bezeichnung \mathbb{F}_p

Beweis $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Sei nun $x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$.
 Wir wollen zeigen: $\exists y \in \mathbb{Z}_p$ mit $\overline{xy} = x \cdot_p y = 1$.
 Nun $x \in \{1, \dots, p-1\}$ und p prim $\Rightarrow \text{ggT}(x, p) = 1$. Also $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \neq 0$.
 $\alpha x + \beta p = 1$. (*)

Also $\alpha x = (-\beta)p + 1$. A priori $\alpha \in \mathbb{Z}$, nehme $\bar{\alpha} \in \{1, \dots, p-1\}$.
 (Bemerke, dass $\bar{\alpha} \neq 0$, sonst $p \mid \alpha$. Aber dann im (*) $p \mid 1$; Unsinn).

Also $\alpha = qp + \bar{\alpha}$ (**)
 (**) in (*) ergibt: $(qp + \bar{\alpha})x + \beta p = 1$.

Also $\bar{\alpha}x + qxp + \beta p = 1$.

Also $\bar{\alpha}x + (qx + \beta)p = 1 \Rightarrow \bar{\alpha}x = -(qx + \beta)_y p + 1$ (***)
 mit $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$.

Setze $\bar{\alpha} := y$.

Berechne $x \cdot_p y = \overline{xy} = 1$ aus (***) und Eindeutigkeit von Rest in DA. \square

Proposition Sei p eine Primzahl, $a, b \in \mathbb{N}$. Wenn $p \mid ab$, dann $p \mid a$ oder $p \mid b$.

Frage Gibt es andere endliche Körper?

Definition (Charakteristik)
 Sei K ein Körper, definiere

$$\text{Char}(K) := \begin{cases} \text{die kleinste natürliche Zahl } (n \geq 2) \text{ wofür} \\ \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 = 0}_{n\text{-mal}} & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Bezeichnung: $\underbrace{1 + \dots + 1}_n$ -mal $:= n \cdot 1$.)

I.e. $\text{Char}(K) = 0$ falls $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1 $\text{Char}(K) \neq 0 \Rightarrow \text{Char}(K) = p$ eine Primzahl.

Beweis

Sei $n \neq 0$ $n = \text{Char}(K)$.

n nicht prim $\Rightarrow n = n_1 n_2$ mit $1 < n_i < n$ für $i = 1, 2$.

$$\text{Also } 0 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n_1 n_2 \text{ mal}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1 \text{-mal}} \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_2 \text{-mal}} = 0.$$

$$\text{Also } \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1 \text{-mal}} = 0 \text{ oder } \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_2 \text{-mal}} = 0 - \text{Widerspruch.} \quad \square$$

Beispiele 2

$\text{Char}(\mathbb{F}_p) = p$

$\text{Char}(\mathbb{Q}) = \text{Char}(\mathbb{R}) = 0$

[weil $1 > 0$

also $1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$

\vdots

$$\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ mal}} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ mal}} + 1 > \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ mal}} > 0]$$

Bemerkung und Definition

$k \subset K$ ist ein *Teilkörper*, falls $0, 1 \in k$,

k abgeschlossen unter $x + y, xy, -x, x^{-1}$ für $x \neq 0$.

Bemerkung: $\text{Char}(k) = \text{Char}(K)$.

Lemma 3

$$K \text{ endlich} \Rightarrow \begin{cases} (1) & \text{Char}(K) = p > 0 \quad \text{und} \\ (2) & |K| = p^l \quad \quad \quad l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Beweis

(1) Wir zeigen die Kontraposition: $\text{Char}(K) = 0 \Rightarrow K$ unendlich.

Wir behaupten: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \neq n_2 \Rightarrow$

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{n_1} \neq \underbrace{1 + \dots + 1}_{n_2}.$$

Ohne Einschränkung (OE) $n_1 > n_2; (n_1 - n_2) > 0$

$$\underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1} - \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_2} = \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n_1 - n_2} = 0 - \text{Widerspruch.}$$

(2) Dafür brauchen wir lineare Algebra! Also später! (Basis und Dimension)

Beispiel 4

$K = \mathbb{F}_p(t)$ ist der Körper der rationalen Funktionen über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p .

K unendlich; aber $\text{Char}(K) = p > 0$. Dafür brauchen wir Polynomringe. Später!

Bemerkung

Also K unendlich $\not\Rightarrow \text{Char}(K) = 0$.

Kapitel 1: § 2 Lineare Gleichungssysteme

Definition 1

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$, und K ein Körper. Eine *lineare Gleichung über K* in den Variablen x_1, \dots, x_n und Koeffizienten in K ist eine Gleichung der Form:
- $$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b \quad (*)$$
- wobei $a_1, \dots, a_n, b \in K$.

Terminologie a_i ist der Koeffizient der Variablen x_i .

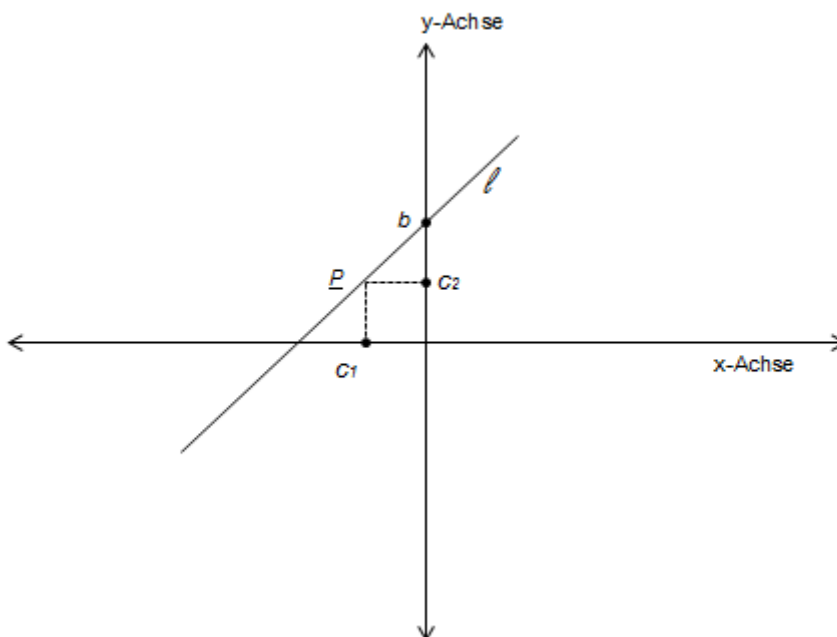
- (ii) Ein n -Tupel $c := (c_1, \dots, c_n) \in K^n$ ist *eine Lösung* der Gleichung (*), falls die Identität
- $$a_1c_1 + \dots + a_nc_n = b$$
- gilt in K .

Beispiele

- a) $\sqrt{2}x_1 + \pi x_2 = e$ ist eine l. G. über \mathbb{R} .
- b) $2\sqrt{x_1} + \pi x_2^2 = e$ ist keine l.G. über \mathbb{R} .
- c) Linie: $y = ax + b$ ist die Gleichung ($a, b \in \mathbb{R}, a :=$ Steigung; $b := y$ -intercept) einer Geraden (in der Ebene \mathbb{R}^2) : l .

Umschreiben: $x_2 - ax_1 = b$.

Lösung: \underline{P} : Punkt in \mathbb{R}^2 ; $\underline{P} = \underline{P}(c_1, c_2)$ mit Koordinaten c_1 und c_2 ist eine Lösung gdw $\underline{P} \in l$, d.h. \underline{P} liegt auf l .



5. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 4. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 4. November 2015)

Definition 1 (i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein *lineares Gleichungssystem* mit m Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S) \left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\} \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_2 = b_2 \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}$$

(ii) Eine *Lösung für (S)* ist $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ein n -Tupel, so dass \underline{x} eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S) ist.

Notation $L(S) := \{ \underline{x} \in K^n; \underline{x} \text{ ist Lösung} \}$
 $L(S)$: die Lösungsmenge.

Ziel Finde und beschreibe $L(S)$.

(iii) (S) ist *homogen*, falls $b_i = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$.

(iv) (S) ist *konsistent*, falls $L(S) \neq \emptyset$.
 (S) ist ansonsten *inkonsistent* ($L(S) = \emptyset$).

(v) (S) homogen $\Rightarrow \underline{x} = \underline{0} := (0, \dots, 0) \in L(S)$ (die triviale Lösung). Also insbesondere (S) homogen $\Rightarrow (S)$ konsistent.

Beispiel 1 3 Gleichungen in 3 Variablen über \mathbb{R}

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{array} \right.$$

(Typ 1 - Umformung)

Vertauschen der ersten mit der dritten Gleichung ergibt

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \\ 2x_3 = 6 \end{array} \right.$$

(Typ 3 - Umformung)

Addition des (-2) -fachen der ersten Gleichung zur zweiten:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ 2x_2 = 2 \\ 2x_3 = 6 \end{array} \right.$$

(Typ 2 - Umformung)

Multiplikation der Zweiten und der dritten Gleichung mit 1/2 ergibt schließlich:

$$(S_2) \begin{cases} x_1 & & = 1 \\ & x_2 & = 1 \\ & & x_3 = 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1, 1, 3)$ eine Lösung (prüfe durch Einsetzen).

$L(S_1) = \{(1, 1, 3)\}$? Die Frage ist, ob man durch die Umformung obiger Gleichung keine Lösungen verloren hat.

Wir wollen zeigen, dass die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen sie nun.

Typ 1:

Vertauschen

$$(S_1) \left. \begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \updownarrow \\ G_j = b_j \\ G_m = b_m \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Typ 1}} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ G_i = b_i \\ \vdots \end{array} \right\} (S_2)$$

Bemerkung I

- (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 1}} (S_1)$
- (ii) \underline{x} Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 2:

Multiplizieren einer Gleichung mit $\lambda \in K^\times$

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array} \xrightarrow{\text{Typ 2}} \begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ \lambda G_i = \lambda b_i \\ \vdots \\ G_m \end{array} \right\} (S_2)$$

Bemerkung II

- (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 2}} (S_1)$ (Multiplikation durch λ^{-1})
- (ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ (folgt aus Körperaxiome), also \underline{x} Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 3: Addieren des λ -fachen der i -ten Gleichung zur j -ten Gleichung
 $i \neq j; \lambda \in K$

$$(S_1) \left\{ \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array} \xrightarrow{\text{Typ 3}} \begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ \lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array} \right.$$

Bemerkung III (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 3}} (S_1)$
 (Addition $(-\lambda)$ -fach der i -ten Gleichung zur j -ten)

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$ und addiere $G_j = b_j$
 also (Körperaxiome) $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$.
 Also \underline{x} Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Definition 2 (S_2) ist äquivalent zu (S_1) , falls man (S_2) aus (S_1) durch endlich viele elementare Gleichungsumformungen erhält.

Bemerkung IV Durch Bemerkung I (i), II (i) und III (i) bekommt man sofort:
 (S_2) äquivalent $(S_1) \Rightarrow (S_1)$ äquivalent (S_2) .
 Also sagen wir: (S_1) und (S_2) sind äquivalent.

Satz I Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmenge.

Beweis Aus Bemerkung I (ii), II (ii) und III (ii) haben wir:
 $L(S_1) \subseteq L(S_2)$.
 Aus Bemerkung I (i), II (i) und III (i) bekommt man nun umgekehrt
 $L(S_2) \subseteq L(S_1)$. Also $L(S_1) = L(S_2)$.

Bemerkung Wir werden die Umkehrung vom Satz später studieren!

Also wollen wir die Gleichung umformen, um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

Kapitel 1: § 3 Matrizen

Definition 3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ Matrix über K ist eine Familie in K der Gestalt

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

wobei $a_{ij} \in K$ für alle i, j .

Darstellung (i) $S_j := j$ -te Spalte

$$m\text{-Zeilen} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow R_i := i\text{-te Reihe}$$

$\uparrow n$ -Spalten

(ii) Die *Koeffizientenmatrix* zum System (S) ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Matrix-Darstellung von (S) ist: $A\underline{x} = \underline{b}$, wobei

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(Eine $n \times 1$ Matrix mit Variablen als Koeffizienten.)

und

$$\underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

(Eine $m \times 1$ -Matrix über K .)

(iii) Die *elementaren Zeilenumformungen* von Typ 1, Typ 2 und Typ 3 entsprechen genau den elementaren Gleichungsumformungen.

(iv) Seien A, B $m \times n$ Matrizen. A und B sind *Zeilenäquivalent*, falls man B aus A durch endlich viele Zeilenumformungen erhält (und / oder umgekehrt).

Das ist die Matrix analog von Definition 2 für Systeme.

Satz 2 (Matrix analog von Satz 1)
 Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

Definition 4 Eine $m \times n$ -Matrix A ist in *reduzierter Zeilenform* (Abkürzung: r.Z.F) falls

- (a) der erste Koeffizient $\neq 0$ ist 1 in einer Reihe $R_i \neq 0$.
 (Dieser erste Koeffizient verschieden von Null heißt *Hauptkoeffizient* bzw. *Haupteins*.
 Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Reihe der Matrix heißt "Nullreihe", falls alle Koeffizienten, die darin vorkommen, gleich Null sind.
- (b) Jede Spalte von A , in der sich eine Haupteins befindet, hat alle anderen Koeffizienten gleich Null.

Beispiel I (Matrix-Form): Erweiterte Matrix von (S_1) :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ nicht in r.Z.F.}$$

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

6. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 8. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 4. November 2015)

Beispiel 1

- (i) Die Identitätsmatrix oder Einheitsmatrix (quadratische Matrix) I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

I_n ist in r.Z.F.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind **nicht** in r.Z.F.

- (iii) Die $0^{m \times n}$ -Matrix ($0_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$) ist in r.Z.F.

Definition 1 Eine $m \times n$ -Matrix A ist in einer (*reduzierten*) *Zeilenstufenform* (r.Z.S.F.), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) Axiome für r.Z.F. und
- (b) Axiome für r.Z.F. und
- (c) jede identische Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht identischen Nullzeile.
- (d) Seien Z_1, \dots, Z_r die nicht identischen Nullzeilen ($r \leq m$) und k_i der Spaltenindex, in der die Haupteins der i -ten Zeile erscheint ($i = 1, \dots, r$), dann gilt $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Satz 1

Jede $m \times n$ -Matrix A ist zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r.Z.S.F.

Beweis Siehe unten

Zweck Aus der r.Z.S.F. kann man $L(S)$ sofort ablesen.

Beispiel 2 Über \mathbb{Q} : Erweiterte Koeff-M:

$$(i) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

$$(ii) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \leftarrow \text{inkonsistent.}$$

$$(iii) \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

x_1, x_2, x_3 Hauptvariablen; x_4 freie Variable.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + & 4x_4 = -1 \\ x_2 & + & 2x_4 = 6 \\ x_3 & + & 3x_4 = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 6 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{array}$$

$$x_4 = q \in \mathbb{Q} \text{ also } L(S) = \{(-1 - 4q, 6 - 2q, 2 - 3q, q) \in \mathbb{Q}^4; q \in \mathbb{Q}\}$$

Beweis von Satz 1:

Falls $A = 0^{m \times n}$, dann ist A bereits in r.Z.S.F. Ansonsten:

Typ 1 Bei wiederholter Anwendung von Typ 1 können wir annehmen, dass die Zeilen Z_1, Z_2, \dots, Z_r nicht Null sind ($r \leq m$)

und Z_{r+1}, \dots, Z_m Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!).

Wir betrachten Z_1 :

Sei $0 \neq a_{1k_1}$ Hauptkoeffizient ($1 \leq k_1 \leq n$)

Typ 2 Multipliziere Z_1 , durch $a_{1k_1}^{-1}$ und dann für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ 3 Addiere $(-a_{ik_1})$ -fach von (der neu erhaltenen Zeile) Z_1 zur i -ten Zeile

$$\begin{array}{c} \text{Spalte } k_1 \\ \downarrow \\ z_1 \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & \dots & * \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ z_r \left(\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \dots & \dots & & \dots & \dots & 0 & \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \end{array} \right) := A_1 \end{array}$$

Nun betrachte Z_2 der Matrix A_1 . Wieder

Typ 1 $\mathbb{C}Z_2 \neq 0$.

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von Z_2 . Bemerke: $k_2 \neq k_1$! Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k_2} & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2k_2} & \cdots & * \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_1 < k_2)$$

Typ 2 Wiederhole: Multipliziere Z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$, dann

Typ 3 Im Fall 1 ($k_2 < k_1$): Addiere $(-a_{ik_2})$ -fach von Z_2 zur i -ten Zeile für $3 \leq i \leq m$.

Typ 3 Im Fall 2 ($k_1 < k_2$): Addiere $(-a_{ik_2})$ -fach von Z_2 zur i -ten Zeile für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$. \square

Achtung Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten

$$a_{1j} = 0 \quad j = 1, \dots, k_1 - 1 \text{ und}$$

$$a_{1k_1} = 1 \text{ und}$$

$a_{ik_1} = 0 \quad i = 2, \dots, m$ von A_1 in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$ nicht geändert haben!

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur für $i = 3, \dots, r$. Wir erhalten eine Matrix A_r , die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich erhalten wir bei wiederholter Anwendung von Typ 1 eine Matrix B , die auch (d) genügt, also B ist in r.z.S.F.

Kapitel 1: § 4 Homogene Systeme

Beispiel 1 Sei R folgende Matrix (über \mathbb{Q})

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix}$$

finde $L(S)$, wobei (S) das homogene System $R\underline{X} = \underline{0}$ ist.

Lösung R ist in r.Z.S.F. Beobachte: $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariable.

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 & + \frac{1}{2}x_5 & = 0 \\ x_4 + 2x_5 & & = 0 \end{array}$$

$$\text{Also } x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

$$x_4 = -2x_5$$

x_1, x_3, x_5 freie Variable. Setze $x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c$.

$$\text{Also } L(S) = \{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5; a, b, c \in \mathbb{Q}\}.$$

Bemerke x_1 freie Variable. Setze $a = 1, b = c = 0$. dann ist $(1, 0, 0, 0, 0)$ eine nicht-triviale Lösung.

7. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 11. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 9. November 2015)

Korollar 1 Sei R eine $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R .

Falls $r < n$, dann hat das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0}(*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis $r =$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen in r.Z.S. F.
 $=$ Anzahl der Haupteins
 $=$ Anzahl der Hauptvariablen.

Also $n - r =$ Anzahl der freien Variablen und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$ es existiert mindestens eine freie Variable x_j . Wir erhalten eine nicht triviale Lösung für (*), indem wir z.B. $x_j = 1$ setzen. \square

Korollar 2 Sei A eine (beliebige) $m \times n$ -Matrix mit $m < n$. Dann hat das homogene System

$$(S) \quad A\underline{X} = \underline{0}$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis Sei R in r.Z.S.F zeilenäquivalent zu A . (R ist immer noch eine $m \times n$ -Matrix.) Setze $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R . Also $r \leq m < n$. Also hat

$$R\underline{X} = \underline{0}(*)$$

nach Korollar 1 nicht triviale Lösungen und damit auch (S). \square

Bemerkung 1 Sei R eine $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und *ohne Nullzeilen* (also jede Zeile hat eine Haupteins). Dann ist $R = I_n$.

Beweis r.Z.S.F $\Rightarrow 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq n$, wobei k_j die Spalte ist, in der die Haupteins der Zeile Z_j erscheint).
 Also $k_j = j$, für alle $j = 1, \dots, n$.
 Also $a_{jj} = 1$, für alle $j = 1, \dots, n$.
 Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der k_j -Spalte
 $\underbrace{\text{r.Z.S.F}}_a a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). \square

Korollar 3 Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Es gilt:
 A zeilenäquivalent zu $I_n \Leftrightarrow A\underline{X} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.

Beweis “ \Rightarrow ” klar, weil $I_n\underline{X} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.
 “ \Leftarrow ” Sei R eine $n \times n$ -Matrix in r.Z.S.F und zeilenäquivalent zu A . Sei $r :=$
 Anzahl der $\neq 0$ -Zeilen von R . Korollar 2 $\Rightarrow r \geq n$. Andererseits $r \leq n$.
 Also $r = n$. Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$. □

Kapitel 1: § 5 Matrix-Multiplikation

Definition 1 Seien A eine $m \times n$ - und B eine $n \times p$ -Matrix über K .
Wir definieren eine neue Matrix $C := AB$; das Produkt als die folgende $m \times p$ -Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^n A_{ir} B_{rj}.$$

Also Zeilen mal Spalten!

Beispiel 1

$$(1) \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ m \times n & n \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} \\ m \times 1 \end{matrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Es gilt $CI_n = I_n A = A$.
Beweis: Wir zeigen $AI_n = A$. ($I_n A$ wird analog behandelt.)

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{r=1}^n A_{ir}(I_n)_{rj} \quad (*)$$

Fall 1 $r \neq j$ $(I_n)_{rj} = 0$
Fall 2 $r = j$ $(I_n)_{rj} = 1$ } in (*) eingesetzt ergibt die Summe

$$\sum_{r=1}^n A_{ir}(I_n)_{rj} = A_{ij}(I_n)_{jj} = A_{ij} \quad \square$$

(4) Über \mathbb{F}_7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} (1 \bullet_7 5) + (2 \bullet_7 0) & (1 \bullet_7 6) + (2 \bullet_7 1) \\ (3 \bullet_7 5) + (4 \bullet_7 0) & (3 \bullet_7 6) + (4 \bullet_7 1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

(5) Die j -te Spalte von AB (als $m \times 1$ -Matrix) = $\underbrace{A}_{m \times n}$ [j -te Spalte von B]

(als $n \times 1$ -Matrix).

und:

Die i -te Zeile von AB (als $1 \times p$ -Matrix) = (als $1 \times n$ -Matrix) [i -te Zeile von A] $(n \times p)B$.

Satz 1 Seien A, B, C Matrizen über K , so dass die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind, dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C.$$

Beweis Sei B eine $n \times p$ -Matrix. Also hat C p Zeilen und BC n Zeilen. Also (weil $A(BC)$ definiert ist) \mathbb{C} ist A eine $m \times n$ -Matrix. Also ist AB eine wohldefinierte $m \times p$ -Matrix und $(AB)C$ ist damit auch wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen, dass die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen, dass alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$\begin{aligned} [A(BC)]_{ij} &= \sum_r A_{ir} (BC)_{rj} \\ &= \sum_r A_{ir} (\sum_s B_{rs} C_{sj}) \\ &= \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj} \text{ (Distributivität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj} \text{ (Kommutativität und Assoziativität in } K) \\ &= \sum_s (\sum_r A_{ir} B_{rs}) C_{sj} \\ &= \sum_s (AB)_{is} C_{sj} \\ &= [(AB)C]_{ij}. \end{aligned}$$

Bezeichnung Seien A eine $n \times n$ -Matrix und $k \in \mathbb{N}$.

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k\text{-mal}} \text{ (wohldefiniert).}$$

8. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 15. November 2011
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 11. November 2015)

Kapitel 1: § 6 Elementare Matrizen

Notation Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$ -Matrix A . Mit $e(A)$ bezeichnet man die $m \times n$ -Matrix, die wir nun erhalten.

Untersuchung Typ 1: Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A :

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

Typ 2: Multiplizieren Z_r durch Skalar $c \neq 0; c \in K$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Typ 3: Ersetzen von Z_r durch $Z_r + cZ_s, c \in K; r \neq s$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Definition 1 Eine $m \times m$ -Matrix in der Form $e(I_m)$ ist *elementar*.

Beispiel 1 Die 2×2 elementaren Matrizen über K :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Typ1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{Typ2, } c \neq 0, c \in K$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Typ3, } c \in F$$

Satz 1 Sei e eine elementare Zeilenumformung und E die elementare Matrix $E := e(I_m)$ und sei A eine $m \times n$ -Matrix über K . Es gilt: $e(A) = EA$.

Beweis $e \in \text{Typ 1}, r \neq s$

- (i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r, i \neq s$ und
- (ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$ und
- (iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$

$$\text{Nun: } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$$

Fall (i): $i \neq r; i \neq s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} \\ &= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij} \end{aligned}$$

Fall (ii): $i = r$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{sk} A_{kj} = \delta_{ss} A_{sj} = A_{sj} \end{aligned}$$

Fall (iii): $i = s$

$$\begin{aligned} (EA)_{ij} &= \sum_{k=1}^m E_{sk} A_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{rk} A_{kj} = \delta_{rr} A_{rj} = A_{rj} \end{aligned}$$

□

e ist vom Typ 2: ÜA.

e ist vom Typ 3: $r \neq s$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

$$\text{Also: } (EA)_{ij} = \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj}$$

Fall 1 $i \neq r$

$$\text{Dann } \sum_{k=1}^m E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^m \delta_{ik} A_{kj} = \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

Fall 2 $i = r$

$$\text{Dann } \sum_{k=1}^m E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^m (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj}$$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglicherweise ungleich Null sind) und zwar nur für $k = r$ oder $k = s$.

$$k = r \Rightarrow \text{Also } k \neq s; \text{ also } c\delta_{sk} = 0; \text{ also } (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj} = (\delta_{rr} + 0) A_{rj} = A_{rj}.$$

$$k = s \Rightarrow \text{Also } k \neq r; \text{ also } \delta_{rk} = 0; \text{ also } (\delta_{rk} + c\delta_{sk}) A_{kj} = (0 + c\delta_{ss}) A_{sj} = cA_{sj}.$$

$$\text{Also } \sum E_{rk} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r \end{cases}.$$

9. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 18. November 2011
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 17. November 2015)

Korollar 1 Seien A und B $m \times n$ -Matrizen über K . Es gilt: B ist zu A zeilenäquivalent gdw $B = PA$, wobei P das Produkt von $m \times m$ -elementaren Matrizen ist.

Beweis

“ \Leftarrow ” Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$, wobei E_t eine elementare $m \times m$ -Matrix ist.

Also ist $E_1 A$ zeilenäquivalent zu A
 und $E_2(E_1 A)$ ist zeilenäquivalent zu $E_1 A$.

Also ist $E_2 E_1 A$ zeilenäquivalent zu A .

So weiter fortsetzen:

$E_\ell \dots E_1 A$ ist zeilenäquivalent zu A

i.e. B ist zeilenäquivalent zu A .

“ \Rightarrow ” Sei B zeilenäquivalent zu A und seien e_1, \dots, e_ℓ die elementaren Zeilenumformungen mit $A \xrightarrow{e_1} \dots \xrightarrow{e_\ell} B$.

Also $E_\ell \dots E_2 E_1 A = B$,

wobei E_t die elementare Matrix $e_t(I_m)$ für $t = 1, \dots, \ell$ ist.

Setze $P := E_\ell \dots E_2 E_1$. □

Definition 1 Eine $n \times n$ -Matrix A ist invertierbar, falls es eine $n \times n$ -Matrix B gibt, so dass

$$AB = I_n \text{ und } BA = I_n.$$

In diesem Fall heißt B eine *Inverse von A* .

Proposition 1 Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse.

Beweis

Seien B_1, B_2 beide Inverse von A . Es gilt:

$$AB_1 = I_n = AB_2$$

$$\text{also } B_2(AB_1) = B_2(AB_2) \quad (\text{Multiplikation})$$

$$\text{also } (B_2 A)B_1 = (B_2 A)B_2$$

$$\text{also } I_n B_1 = I_n B_2, \quad \text{i.e. } B_1 = B_2 \quad \square$$

Notation

Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A .

Proposition 2 Seien A, B $n \times n$ -Matrizen über K . Es gilt

(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1} und $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis

- (i) Wir berechnen $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Also ist A die Inverse von A^{-1} .
- (ii) Wir berechnen $B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B \equiv I_n$.
Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. \square

Korollar 2

Seien A_1, \dots, A_ℓ $n \times n$ -invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt $(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}$ (*)

Beweis

Induktion nach ℓ . Für $\ell = 1$ ist es klar.

Induktionsannahme: (*) gilt für ℓ .

Induktionsschritt: (*) gilt für $\ell + 1$:

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} &= \\ ((A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1})^{-1} &= \leftarrow \text{ Proposition 2 (ii)} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} &= \leftarrow \text{ Induktionsannahme} \\ A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) &= \leftarrow \text{ Assoziativität} \\ A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} & \quad \square \end{aligned}$$

Proposition 3 Elementare Matrizen sind invertierbar.**Beweis**

Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix. Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung (auf die Zeilen von I_n) und $E^* := e^*(I_n)$. Wir berechnen

$$E^*E = e^*(I_n)e(I_n) = I_n \quad \text{und} \quad E^*E = EE^* = I_n$$

D.h. $E^* = E^{-1}$. \square

Beispiel 1

2×2 -elementare Matrizen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} \\ c \neq 0 \\ \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 1

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Sind äquivalent:

- (i) A ist invertierbar.
 - (ii) $A\underline{x} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$ -Spaltenmatrix \underline{b} .
 - (iii) $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung.
 - (iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n .
 - (v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.
- (ii) und (iii): Beziehung zwischen homogener und allgemeiner (quadratischer) Systeme.

Beweis(i) \Rightarrow (ii)Setze $\underline{x} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt $A\underline{x} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}$.(iii) \Leftrightarrow (iv) schon bewiesen (Korollar 3, 7. Vorlesung i.e. Korollar 7.3)(ii) \Rightarrow (iii)Wenn $A\underline{x} = 0$ nicht triviale Lösungen hätte, dann ist die r.Z.S.F. R von A nicht I_n , also muss eine Nullzeile haben. Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad R\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \dots & \dots & \dots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 1). Also ist P invertierbar (Korollar 2 und Proposition 3).Also multipliziere (S) durch P^{-1} :

$$(S) \quad (PA)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } P^{-1}(PA)\underline{x} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent.}$$

$$\text{Also } A\underline{x} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} n \times n & n \times 1 \\ & n \times 1 \end{matrix}}_{n \times 1}$$

$$\text{Setze } \underline{b} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ wir bekommen } A\underline{x} = \underline{b}. \text{ Inkonsistent. Widerspruch.}$$

(iv) \Rightarrow (V) $A = P'I_n = P'$, wobei P' das Produkt von elementaren Matrizen ist (Korollar 1).(v) \Rightarrow (i)Folgt aus Korollar 2 und Proposition 3. □**Korollar 3** Seien A und B $m \times n$ -Matrizen. B ist zeilenäquivalent zu A genau dann, wenn $B = PA$, wobei P eine invertierbare $m \times m$ -Matrix ist.

10. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS 2011/2012: 22. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 19. November 2015)

Korollar 1 Seien A , eine $n \times n$ -Matrix, invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1} .

Beweis Die elementaren Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit elementaren Matrizen erreicht, d.h. $E_\ell \dots E_1 A = I_n$. Aber dann gilt: $A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n$. \square

Beispiel 1 $(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-2)Z_1 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-1)Z_1 + Z_3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{3Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-3)Z_3 + Z_1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Kapitel 2: § 1 Vektorräume

Definition 1 Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen

(i) Skalarmultiplikation

$$\bullet : K \times V \rightarrow V \\ (c, v) \mapsto cv \text{ und}$$

(ii) Vektorsumme

$$+ : V \times V \rightarrow V \\ (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$$

Das Triple $(V, \bullet, +)$ ist ein K -Vektorraum (K -VR) oder ein Vektorraum über K (VR/ K), falls die folgenden Axiome erfüllt sind: $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

$$\left. \begin{array}{l} 1 \cdot \alpha = \alpha \\ (c_1 c_2) \alpha = c_1 (c_2 \alpha) \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2 \\ (c_1 + c_2) \alpha = c_1 \alpha + c_2 \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall \alpha \in V \\ \forall c_1, c_2 \in K \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ \forall c \in K \end{array}$$

Beispiel 1 $V = K^n$ mit koordinatenweisen Verknüpfungen.

Beispiel 2 Allgemeiner: $K^{m \times n} := \text{Mat}_{m \times n}(K) :=$ die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten aus K und Matrixsumme und skalarvielfach.

Beispiel 3 Sei S eine Menge.
 $V := \{f; f : S \rightarrow K; f \text{ Abbildung}\}$
 $V := K^S$ mit Funktionensummen und skalarvielfach.

Beispiele 1 und 2 sind Sonderfälle von Beispiel 3.

Beispiel 4 Der VR der Polynomfunktionen über K
 $f(x) = c_0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n, c_i \in K.$

Beispiel 5 K / k eine Körpererweiterung.

Proposition 1 Für $c \in K, \alpha \in V$

- (1) $c \cdot 0 = 0$
- (2) $0 \cdot \alpha = 0$
- (3) $c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$
- (4) $(-1) \cdot \alpha = -\alpha$

Definition 2 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$; $\alpha \in V$ ist eine *lineare Kombination* (von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$), wenn es $c_1, \dots, c_n \in K$ gibt mit $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$.

Proposition 2 $\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$
 $c \sum c_i \alpha_i = \sum (cc_i) \alpha_i$.

11. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS 2011/2012: 25. November 2011
 (Dr. Merlin Carl in Vertretung)
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 23. November 2015)

Kapitel 2: § 2 Unterräume

Definition 1 Sei V ein K -Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein *Teilraum*, falls $(W, +, \bullet)$ ein K -Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfung von V auf W i.e. es sollen gelten $+ : W \times W \rightarrow W$ und $\bullet : K \times W \rightarrow W$ und auch die Vektorraumaxiome).

Dazu sind nachzurechnen:

$$\begin{aligned} 0_V \in W; \quad \alpha, \beta \in W &\Rightarrow \alpha + \beta \in W \\ c \in K, \alpha \in W &\Rightarrow c\alpha \in W \\ (\text{insbesondere } \alpha \in W &\Rightarrow -\alpha \in W) \end{aligned} .$$

Also gibt es ein einfaches Kriterium.

Satz 1 Sei V ein K -Vektorraum, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V genau dann, wenn für alle $\alpha, \beta \in W, c \in K : \alpha + c\beta \in W$.

Beispiele

- (1) Ist V ein K -Vektorraum, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V .
- (2) $V = K^n$
 $W := \{x_1, \dots, x_n\} \in K^n \mid x_1 = 0\}$ ist Unterraum, aber $X := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x_1 = 1 + x_2\}$ nicht!
 (E.g. $(0, \dots, 0) \notin X$).
- (3) Die Symmetrischen $n \times n$ -Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$)
 Seiten $A, B \in \text{Sym}_{n \times n}(K); c \in K$, dann ist
 $(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + cB_{ij} = A_{ji} + cB_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji} = (A + cB)_{ji}$.
 Also $A + cB \in \text{Sym}_{n \times n}(K)$ wie gewünscht.
- (4) Ein sehr wichtiges Beispiel!
 Der Lösungsraum eines homogenen LGS: A sei eine $m \times n$ -Matrix über K . Dann ist

$$\{x \in \text{Mat}_{n \times 1}(K) \mid Ax = 0\}$$

ein Unterraum von $\text{Mat}_{n \times 1}(K)$.

Beweis: Wir zeigen allgemeiner:

Ist $A \in \text{Mat}_{m \times n}(K), B, C \in \text{Mat}_{n \times p}(K), d \in K$, so ist
 $A(B + dC) = AB + dAC$.

(4) Fortsetzung von Seite 1:

Dann

$$\begin{aligned} [A(B + dC)]_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik}(B + dC)_{kj} = \sum A_{ik}(B_{kj} + (dC)_{kj}) \\ &= \sum A_{ik}B_{kj} + \sum A_{ik}(dC)_{kj} = \sum A_{ik}B_{kj} + \sum dA_{ik}C_{kj} \\ &= (AB)_{ij} + d \sum A_{ik}C_{kj} = (AB)_{ij} + d(AC)_{ij}. \end{aligned}$$

Insbesondere:

$$\text{Ist } AX_1 = AX_2 = 0, \text{ so auch } A(X_1 + dX_2) = 0. \quad \square$$

Definition 2 Sei V ein K -Vektorraum und $X \subseteq V$. Eine lineare Kombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v \in X} c_v v$ mit $c_v \in K$, wobei $c_v = 0$ für alle bis auf endliche viele v .

Damit können wir nun definieren

Definition 3 Sei V ein K -Vektorraum und $X \subseteq V$. Dann ist $\text{span}(X)$, der von X *aufgespannte* oder *erzeugte* Unterraum, definiert als

$$\text{span}(X) := \left\{ \sum_{v \in X} c_v v \mid c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endliche viele } v \in X \right\}.$$

Konvention: $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Proposition Für jede $X \subseteq V$ ist $\text{span}(X)$ ein Unterraum.

Beweis $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$. Sonst $X \neq \emptyset \Rightarrow \text{span}(X) \neq 0$. Seien $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v$, $\beta = \sum_{v \in X} d_v v \in \text{span}(X)$. Sei $c \in K$. Also $\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + cd_v)v \in \text{span}(X)$. \square

Es ist sogar der "kleinste" Unterraum der X enthält. Das ist unser nächstes Ziel.

Satz 2 Sei V ein K -VR, und χ eine Menge von Unterräumen. Dann ist $\bigcap \chi$ ein Unterraum von V .

Beweis $\bigcap \chi := \bigcap_{W \in \chi} W$.
 $0_v \in W$ für alle $W \in \chi$ also $0_v \in \bigcap \chi \neq \emptyset$.
 Sind $\alpha, \beta \in \bigcap \chi$, $c \in K$, so sind für jedes $W \in \chi$ auch $\alpha, \beta \in W$, also $\alpha + c\beta \in W$. Daraus folgt $\alpha + c\beta \in \bigcap \chi$. \square

Es sei nun für $X \subseteq V$ $L(X)$ definiert als

$$L(X) := \bigcap \{W \subseteq V \mid W \text{ ist ein Unterraum und } X \subseteq W\}.$$

Satz 3 Für $X \subseteq V$ ist $L(X) = \text{span}(X)$.

Beweis $X = \emptyset.L(X) := \bigcap \{W \subseteq V \mid W \text{ Unterraum}\} = \{0\} = \text{span}(\emptyset)$.
 $X \neq \emptyset$:

(1) $L(X) \subseteq \text{span}(X)$:

$\text{span}(X) \subseteq V$ ist ein Unterraum und $X \subseteq \text{span}(X)$. Also $\text{span}(X) \in \{W \subseteq V \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\}$.

Also $v \in L(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{W \mid W \text{ ein Unterraum und } X \subseteq W\} \Rightarrow v \in \text{span}(X)$.

(2) $\text{span}(X) \subseteq L(X)$:

Sei $v \in \text{span}(X)$, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $X \subseteq W$.

Da $v \in \text{span}(X)$, existiert $(c_x; x \in X)$ ($c_x \in K$ für alle $x \in X$) mit $v = \sum_{x \in X} c_x x$, wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endlich viele x . Da W ein Unterraum ist und $X \subseteq W$, ist $\sum_{x \in X} c_x x = v \in W$.

Da W beliebig war, ist v Element von jedem Unterraum mit diesen Eigenschaften, also auch des Durchschnitts. \square

Wir können auch mehrere Unterräume zusammenfassen:

Definition 4 Seien $S_1, \dots, S_k \subseteq V$, V ein $K - VR$.

Dann ist $S_1 + \dots + S_k := \{x_1 + \dots + x_r \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$

kurz auch $\sum_{i=1}^k S_i := \{\sum_{i=1}^k x_i \mid x_i \in S_i; 1 \leq i \leq k\}$.

Korollar 4 Seien W_1, \dots, W_k Unterräume von V . Dann ist $W := \sum_{i=1}^k W_i$ ein Unterraum von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \leq i \leq k$.

Beweis Übungsaufgabe \square

Korollar 5 Sind W_1, \dots, W_k Unterräume von V , so ist $W := \sum_{i=1}^k W_i = \text{span}(\bigcup_{i=1}^k W_i)$.

Beweis " \subseteq ": Sei $v \in \sum W_i$. Also existiert $w_i, i \in \{1, \dots, k\}$ mit $w_i \in W_i$ und $v = \sum w_i$.
 Dann $w_i \in \bigcup_{j=1}^k W_j$ für jedes $1 \leq i \leq k$.
 Also $v = \sum w_i \in \text{span}(\bigcup_{j=1}^k W_j)$.

" \supseteq ": Sei $v \in \text{span}(\bigcup W_i)$. Dann existiert $(c_i; i \leq k)$ und $(w_i \mid i \leq k)$ mit $c_i \in K; w_i \in W_i$, so dass $v = \sum c_i w_i$.

(Bemerkung: Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!)

Da W_i Unterräume sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also existiert $(w'_i \mid i \leq k)$ mit $w'_i \in W_i$ und $v = \sum w'_i$ (nämlich $w'_i := c_i w_i$).

also $v \in \sum W_i$. \square

Beispiel Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Teilkörper, ferner

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 := (1, 2, 0, 3, 0) \\ \alpha_2 := (0, 0, 1, 4, 0) \\ \alpha_3 := (0, 0, 0, 0, 1) \end{array} \right\} \in K^5$$

$\alpha \in \text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ genau dann, wenn $c_1, c_2, c_3 \in K$ existiert mit $\alpha = \sum_{i=1}^3 c_i \alpha_i$, also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$
 $\text{span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5; x_2 = 2x_1, x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.

12. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 29. November 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 30. November 2015)

Kapitel 2: § 3 Basen und Dimension

Definition 1 Sei V ein K -Vektorraum. $S \subseteq V$ ist *linear abhängig (l.a.)* über K , falls verschiedene $v_1, \dots, v_n \in S$ und skalaren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle Null mit $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$ existieren.
 S ist linear *unabhängig (l.u.)* über K , falls S nicht linear abhängig ist (e.g. \emptyset ist linear unabhängig).

Konvention $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist endlich. Wir sagen:
 v_1, \dots, v_n linear unabhängig/ linear abhängig.

Bemerkung 1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a. $\Rightarrow S_2$ l. a. also

2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l.u. $\Rightarrow S_1$ linear unabhängig.

Beispiel 1 3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l.a. (weil $1 \cdot 0 = 0$)

(ii) $\{v\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v = 0$

(iii) $\{v_1, v_2\}$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v_1 = cv_2, c \in K$

4. S ist linear unabhängig genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von S ist linear unabhängig, d.h. genau dann, wenn für verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in S$ und alle $c_1, \dots, c_n \in K$ aus $\sum c_i v_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 2
$$\left. \begin{array}{l} v_1 = (3, 0, -3) \\ v_2 = (-1, 1, 2) \\ v_3 = (4, 2, -2) \\ v_4 = (2, 1, 1) \end{array} \right\} \in \mathbb{R}^3$$

$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0 \cdot v_4 = 0 \Rightarrow$ l.a. über \mathbb{R} .

Beispiel 3 Seien $\beta_1 = (1, 1, 2), \beta_2 = (1, 0, 1), \beta_3 = (2, 1, 3)$. Ist $\text{span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?
 Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit
 $(b_1, b_2, b_3) = c_1(1, 1, 2) + c_2(1, 0, 1) + c_3(2, 1, 3)$.
 D.h.: Hat das LGS

$$\begin{array}{rcl} c_1 & + & c_2 & + & 2c_3 & = & b_1 \\ c_1 & & & + & c_3 & = & b_2 \\ 2c_1 & + & c_2 & + & 3c_3 & = & b_3 \end{array}$$

eine Lösung für **jede** $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$?

Satz 1, 9. Vorlesung \Rightarrow dies ist der Fall genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Beispiel 4 $v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$ linear abhängig?

Betrachte $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$. Also homogene LGS.

$$\left. \begin{array}{l} c_1 + 5c_2 + 3c_3 = 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{array} \right\} v_1, v_2, v_3 \text{ l. a., gdw es keine triviale Lösung gibt.}$$

Also v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (Satz 1, 9. Vorlesung).

Definition 2 Sei V ein K -Vektorraum. Eine *Basis* für V ist eine linear unabhängige Teilmenge, die V erzeugt. V ist *endlich dimensional*, falls es eine endliche Basis für V gibt, i.e.

$S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ mit

(i) S linear unabhängig

(ii) $\text{span}(S) = V$.

Beispiel 5 $V = K^n$. Die Standardbasis ist $\{e_i; i = 1, \dots, n\}$, wobei $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$; 1 \rightarrow i -te Stelle.

Satz 1 Sei V ein K -Vektorraum, so dass V endlich erzeugt ist, i.e. ex. $\beta_1, \dots, \beta_m \in V$ mit $\text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\}) = V$. Dann ist jede linear unabhängige Teilmenge endlich und hat höchstens m Elemente.

Beweis Wir zeigen: Hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente, dann ist S linear abhängig.

Seien $v_1, \dots, v_n \in S; n > m$.

$\forall j = 1, \dots, n, v_j \in \text{span}(\{\beta_1, \dots, \beta_m\})$, also für $j = 1, \dots, n$ ex. $A_{1j}, \dots, A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i.$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen der $v_j; 1 \leq j \leq n$.

Für $x_1, \dots, x_n \in K$ berechne

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j v_j &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m (A_{ij} x_j) \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j) \beta_i \end{aligned} \quad (*)$$

Beweis, Forts. Betrachte das homogene LGS in m Gleich und n Unbekannten x_1, \dots, x_n :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (**)$$

$n > m$ also Satz (7. Vorlesung, Korollar 2) impliziert, dass es nicht triviale Lösungen gibt.

Also ex. $x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null, so dass $\sum_{j=1}^n A_{ij}x_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$.

Zurück in (*) ergibt l.a. der $v_j; 1 \leq j \leq n$. □

13. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 2. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 3. Dezember 2015)

Korollar 1 Sei V endlich dim Vektorraum über K . Es gilt: Alle Basen haben dieselbe Kardinalität.

Beweis Seien Basen $\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = \{\beta_1, \dots, \beta_m\} \\ \mathcal{B}_2 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{erzeugt} \\ \text{linear unabhängig} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{linear unabhängig} \\ \text{erzeugt} \end{array}$

Satz impliziert $n \leq m$ und auch $m \leq n$, also $m = n$ □

Wir können nun eindeutig $\dim V$ definieren.

Definition 1 Sei V endlich dim. K -Vektorraum.
 $\dim V := |\mathcal{B}|$ \mathcal{B} eine Basis für V .

Wir können nun den Satz umformulieren.

Korollar 2 Sei V ein endlich dim Vektorraum; $n := \dim V$.

- (a) Jede Teilmenge mit mehr als n Elementen ist linear abhängig. (Eine linear unabhängige Teilmenge hat $\leq n$ Elemente.)
- (b) Jede Teilmenge mit weniger als n Elementen ist nicht erzeugend. (Eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente.)

Beispiel 1

- (a) $V = \{0\}$, $\mathcal{B} = \emptyset$, $\dim V = |\emptyset| = 0$
- (b) $\dim K^n = n$, weil die Standardbasis $\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ hat $|\mathcal{E}| = n$.
- (c) $K^{m \times n} = \text{Mat}_{m \times n}$ hat die Dimension mn : Die mn -Matrizen mit einer 1 in der ij -ten Stelle und 0 sonst ist eine Basis.

Korollar 3

- (d) $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f: \mathbb{N} \rightarrow K\}$ ist **nicht** endlich dim, weil die Elemente $f_i: \mathbb{N} \rightarrow K$
 $f_i(n) := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$

eine unendliche linear unabhängige Teilmenge definieren, nämlich $S := \{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Seien $i_1 < \dots < i_k$ und $c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} = 0$, so ist $(c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k})(i_l) = c_l = 0$, für alle $l = 1, \dots, k$.

Lemma 1 (Fortsetzung Lemma)

Sei V ein K -Vektorraum. Sei S linear unabhängig in V und $\beta \notin \text{span}(S)$. Dann ist $S \cup \{\beta\}$ linear unabhängig.

Beweis Seien $c_1, \dots, c_m, b \in K$ mit $c_1\alpha_1 + \dots + c_m\alpha_m + b\beta = 0$.

Behauptung:

$b = 0$, sonst $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \dots + (-c_m)\alpha_m, b \neq 0$.

Also $\beta = [(-c_i)b^{-1}]\alpha_1 + \dots + [(-c_m)b^{-1}]\alpha_m \Rightarrow \beta \in \text{span}(S)$ - Widerspruch.

Also $b = 0$.

Also $\sum c_i\alpha_i = 0$ und S ist linear unabhängig $\Rightarrow c_i = 0$, für alle $1 \leq i \leq m$. \square

Satz 1 Sei V ein endlich dim K -Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Jede linear unabhängige Teilmenge von W ist endlich und ist Teil einer (endlichen) Basis für W .

Beweis Sei $S \subseteq W$ linear unabhängig und beobachte: $S \subseteq V$ ist linear unabhängig. Also $|S| \leq \dim V$.

sei nun $S_0 \subseteq W$ linear unabhängig. Wir setzten S_0 zu einer Basis fort wie folgend.

Betrachte $\text{span}(S_0) \subseteq W$. Unterraum.

Falls = okay.

Fall \subsetneq , sei $\beta_1 \in W; \beta_1 \notin \text{span}(S_0)$. Setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$ linear unabhängig (Lemma 1).

Wiederhole: $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$ linear unabhängig usw.

In höchstens $\dim V$ vielen Schritten erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, wofür $\text{span}(S_m) = W$ sein muss!

Ferner S_m linear unabhängig, also S_m Basis für W . \square

Korollar 4 Sei W ein **echter** Unterraum vom endlich dim K -Vektorraum V (i.e. $W \subsetneq V$). Dann ist W endlich dim und $\dim W < \dim V$.

Beweis Setze $S_0 = \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz. Wir erhalten eine Basis S_m von W ; $\text{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ vielen Schritten. Also $m := \dim W \leq \dim V$.

Aber W echt; ex. $\beta \notin W$, i.e. $\beta \notin \text{span}(S_m)$. Also $S_m \cup \{\beta\}$ linear unabhängig; so $m + 1 \leq \dim V$. Also $m < \dim V$. \square

Korollar 5 Sei V endlich dim Vektorraum über K . Jede linear unabhängige Teilmenge ist Teil einer Basis.

Korollar 6 Seien W_1, W_2 endlich dim K -Vektorräume. ($W_1 \subseteq V$ und $W_2 \subseteq V$ Unterräume.) Es gilt $W_1 + W_2$ ist endlich dim und $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$.

Beweis Satz und Korollare implizieren, dass $W_1 \cap W_2$ eine endliche Basis $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ hat und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ Basis für W_1 , $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ Basis für W_2 für geeignete $\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_m}_{\in W_1}, \underbrace{\delta_1, \dots, \delta_n}_{\in W_2}$.

Der Vektorraum $W_1 + W_2$ wird von $\alpha_1, \dots, \alpha_k; \beta_1, \dots, \beta_m; \delta_1, \dots, \delta_n$ erzeugt.

Behauptung Diese Vektoren sind linear unabhängig.

Beweis $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \delta_r = 0 \quad (*)$

$$\Rightarrow -\sum z_r \delta_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j.$$

Also $\sum z_r \delta_r \in W_1$. Aber auch $\in W_2$ per Definition. Also $\in W_1 \cap W_2$.

Also $\sum z_r \delta_r = \sum c_i \alpha_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_k \in K$.

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \delta_1, \dots, \delta_n\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow z_r = 0$, für alle $1 \leq r \leq n$.

Also $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$ in $(*)$ und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ sind linear unabhängig $\Rightarrow x_i = 0$ und $y_j = 0$, für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq m$.

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k + m) + (k + n) = k + (m + k + n)$. \square

14. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 6. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 3. Dezember 2015)

Kapitel 2: § 4 Koordinaten

Definition 1 Sei V endlich dim K -Vektorraum; $\dim V = n$.
Eine *geordnete Basis* ist ein n -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$, so dass $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis ist.

Notation und Terminologie Wir schreiben $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis. (Wir werden nicht $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ schreiben.)

Lemma 1 Sei V ein endlich dim K -Vektorraum; $\alpha \in V$, dann existiert ein eindeutiges n -Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i$.

Beweis $\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - z_i) \alpha_i = 0 \Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i$, für alle $1 \leq i \leq n$.
 \square

Definition 2

- (1) x_i ist die i -te Koordinate von α bezüglich \mathcal{B} .
- (2) (x_1, \dots, x_n) ist das Koordinaten-Tupel von α bezüglich \mathcal{B} .

Definition 3 V, W sind K -Vektorräume.

- (1) $T : V \rightarrow W$ ist eine *lineare Abbildung* (oder *Transformation*), falls
 - (a) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$
 - (b) $T(c\alpha) = cT(\alpha)$; $\alpha, \beta \in V$; $c \in K$; (a) und (b) sind äquivalent zu:
 $\forall \alpha, \beta \in V, \forall c \in K$
 - (c) $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$

Bemerkung

$$\left. \begin{array}{l} T(0) = T(0 + 0) \\ T(0) = T(0) + T(0) \end{array} \right\} \Rightarrow T(0) = 0.$$

(2) T ist eine *Isomorphie* oder ein *Isomorphismus*, falls T ferner bijektiv ist.

Notation $V \stackrel{T}{\simeq} W$ oder $V \simeq W$

Terminologie V und W sind isomorph.

Lemma 2 Sei T eine lineare Transformation. Dann ist T injektiv genau dann, wenn $\forall \alpha (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Beweis " \Rightarrow " T ist injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$. Also $\alpha = 0$.

" \Leftarrow " Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$, dann $T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$, i.e. $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$.
Also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Satz $\dim V = n, V$ ein K -Vektorraum, $\Rightarrow V \simeq K^n$.

Beweis Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis. Definiere $T : V \rightarrow K^n$
 $\alpha \mapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$
:= Koordinaten-Tupel von α bezüglich \mathcal{B} .

$$T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta).$$

Sei $\alpha = \sum x_i \alpha_i, \beta = \sum y_i \alpha_i, \alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$.

Analog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$.

$T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$, weil $x_1 = \dots = x_n = 0$.

So T injektiv.

Sei $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Setze $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$. Es gilt $T(\alpha) = (x_1, \dots, x_n)$.

So T surjektiv. □

Notation Koordinaten Spaltenmatrix von α bezüglich \mathcal{B} :

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

15. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 9. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 9. Dezember 2015)

Beispiel 1 $V = \mathbb{R}^3$; $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2, 1) \\ \alpha_2 = (2, 9, 0) \\ \alpha_3 = (3, 3, 4) \end{array} \right\} \text{ eine Basis weil } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar.}$$

Finde
(i) $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

und finde

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$.

Zu (i): $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

Zu (ii): Finde x_1, x_2, x_3 mit $\alpha = \sum_{i=1}^3 x_i \alpha_i$ d.h.

$$(5, -1, 9) = x_1(1, 2, 1) + x_2(2, 9, 0) + x_3(3, 3, 4)$$

Löse LGS:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 9x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ x_1 & + & 4x_3 = 9 \end{array}$$

Lösung: $x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ für \mathcal{B} und \mathcal{B}' geordnete Basen?

Bemerkung $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$.

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$.

Schreibe $\alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i \quad p_{ij} \in K$ - eindeutig

$$\text{d.h. } [\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}.$$

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{Also } \alpha &= \sum_{j=1}^n x'_j \alpha'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (p_{ij} x'_j) \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \right) \alpha_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Es folgt aus (*), dass die i -te Koordinate von α bezüglich \mathcal{B} ist:

$$x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j \quad 1 \leq i \leq n \quad (**)$$

Sei P die $n \times n$ -Matrix mit ij -tem Koeffizient p_{ij} . Wir schreiben (**) um: $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n p_{1j} x'_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n p_{nj} x'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Ferner aus $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$ folgt, dass das homogene LGS $PX' = 0$ nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat. Also ist P invertierbar. Wir bekommen also dual $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Wir haben bewiesen:

Satz 1 Sei $\dim(V) = n$ über K , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geordnete Basen; P die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha'_j]_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \dots, n$. Es gelten für alle $\alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Satz 2 Sei P $n \times n$ invertierbar (über K), V ein n -dim K -Vektorraum und \mathcal{B} eine geordnete Basis. Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) geordnete Basis \mathcal{B}' von V , so dass für alle $\alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Beweis Wenn $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = P[\alpha'_j]_{\mathcal{B}'} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}, \text{ also } \alpha'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \alpha_i.$$

Nun zeigen wir, dass die so definierten α'_j eine Basis bilden. Sei $Q := P^{-1}$.

Wir berechnen:

$$\sum_j Q_{jk} \alpha'_j = \sum_j Q_{jk} \sum_i p_{ij} \alpha_i = \sum_j \sum_i p_{ij} Q_{jk} \alpha_i = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j p_{ij} Q_{jk} \right)}_{(PQ)_{ik}} \alpha_i =$$

$$\sum_i (\delta_{ik}) \alpha_i = \alpha_k \text{ für } 1 \leq k \leq n.$$

Also $\text{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$. So $\text{span}(\mathcal{B}') = V$. \square

(Siehe HL1 und HL2)

$$\text{ÜB 8} \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Hilfslemma 1:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ linear unabhängig} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \\ \textbf{Hilfslemma 2:} \quad \dim V = n; X \subseteq V; \\ \quad \quad \quad |X| = n \text{ und } X \text{ erzeugt} \Rightarrow X \text{ eine Basis.} \end{array} \right.$$

Korollar P $n \times n$ ist invertierbar \Leftrightarrow die Spalten von P sind linear unabhängig in K^n .

Beweis $P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = PX = 0$ hat nur die triviale Lösung $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i P_i = 0$ ist eine triviale lineare Kombination, wobei P_i die i -te Spalte von P ist.

Korollar P $n \times n$ ist invertierbar; $\dim(V) = n$ genau dann, wenn die Spalten von P eine Basis für V bilden.

Beispiel Eine parametrische Familie von geordneten Basen $K = \mathbb{R}; \theta \in \mathbb{R}$.

$P = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

So gilt für jede $\theta \in \mathbb{R}$, dass $\mathcal{B}_\theta := \{(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)\}$ eine Basis für \mathbb{R}^2 ist.

Sei $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Es gilt } [\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{pmatrix}$$

16. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 13. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 21. Dezember 2015)

Erinnerung

$$(i) \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \alpha_i : i\text{-te Zeile.}$$

$$\text{Es gilt: } yA = y_1\alpha_1 + \dots + y_n\alpha_n.$$

$$(ii) \quad i\text{-te Zeile von } BA = [i\text{-te Zeilenmatrix von } B] A = \\ (B_{i1}, \dots, B_{in}) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Also ist die i -te Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A .

Korollar 1 A $n \times n$ über K , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Zeilenvektoren von A linear unabhängig $\Rightarrow A$ invertierbar.

Beweis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n , also schreibe Standard Basisvektor: $e_i = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j \quad 1 \leq i \leq n.$

Sei B die $n \times n$ -Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten. Betrachte die Matrix BA , die i -te Zeile von $BA = [i\text{-te Zeile von } B]A$, ie. $(B_{i1}, \dots, B_{in})A = \sum_{j=1}^n B_{ij}\alpha_j = e_i$. Also $BA = I_n$. \square

Für die Umkehrung siehe Übungsblatt.

Kapitel 2: § 5 Zeilenraum

Definition 1 Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ - - - - \\ - - - - \\ - - - - \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K^n$ Zeilen von A .

Der *Zeilenraum* von A ist $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq K^n$ (Unterraum).

Der *Zeilenrang* von A ist die Dimension davon.

Satz 1 Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

Beweis $B = PA$; P invertierbar; A, B $m \times n$.
 A $m \times n$; B $m \times n$; P $m \times m$
 So $B = P A \leftarrow$ jede B -Zeile ist eine Linearkombination von A -Zeilen.
 Also $A = P^{-1}B \leftarrow$ jede A -Zeile ist eine Linearkombination von B -Zeilen.
 Also liegt jede B -Zeile im $\text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ und umgekehrt.
 Also Zeilenraum von $A =$ Zeilenraum von B . □

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 1 zeigen. Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r.Z.S.F.

Satz 2 Sei $R \neq 0$ in r.Z.S.F. Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R (also Zeilenrang von $R = \#$ der Zeilen, die ungleich 0 sind).

Beweis Seien p_1, \dots, p_r die Zeilen $\neq 0$; $R = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ \vdots \end{pmatrix}$

Es ist klar, dass p_1, \dots, p_r den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun lineare Unabhängigkeit (analog Beispiel 1 (d) in 13. Vorlesung).

Seien $k_1 < \dots < k_r$ die Spaltenindexe (in der die Haupteinse der p_i erscheinen)
 $c_1 p_1 + \dots + c_r p_r = c_1(0, \dots, 1, \dots, 0) + c_2(\dots, 0, 1, \dots, 0) + \dots + c_r(0, \dots, 0, 1, \dots, 0) = (0, \dots, 0)$ impliziert $c_1 = \dots = c_r = 0$. □

Hilfslemma Seien R und R' $m \times n$ in r.Z.S.F. Es gilt: R und R' haben denselben Zeilenraum **impliziert** $R = R'$.

Beweis $k_1 < \dots < k_r \leftarrow$ Haupteins-Spalten. $k'_1 < \dots < k'_r$ Index wie oben.
 Beobachte: Wenn p_i eine lineare Kombination von $\{p'_1, \dots, p'_r\}$ ist, dann gilt $k_i = k'_i$ für alle $1, \dots, r$. □

Satz 3 Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Sei W ein Unterraum von K^n ; $\dim W \leq m$. Es gilt: $\exists!$ $m \times n$ -Matrix in r.Z.S.F. R mit Zeilenraum $R = W$.

Beweis **Existenz:** $\dim W \leq m$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$; $\text{span} \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = W$. Setze

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ - - - \\ - - - \\ - - - \\ \alpha_m \end{pmatrix} m \times n\text{-Matrix.}$$

Zeilenraum $A = W$. A Z. ä. zu R in r.Z.S.F. und Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R = W$.

Eindeutigkeit: Sei R' eine Matrix in r.Z.S.F. mit Zeilenraum $R' = W$. Dann gilt: Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $R' \stackrel{(H.L.)}{\Rightarrow} R = R'$. \square

Korollar 1 Jede $m \times n$ -Matrix ist zeilenäquivalent zu einer *eindeutigen* Matrix in r.Z.S.F.

Beweis A ist zeilenäquivalent zu R und A ist zeilenäquivalent zu R'
 \Rightarrow Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R' \Rightarrow R = R'$. \square

Korollar 2 A, B sind $m \times n$ -Matrizen über K . Es gilt A ist zeilenäquivalent zu B genau dann, wenn Zeilenraum $A =$ Zeilenraum B .

Beweis " \Rightarrow " \checkmark
 " \Leftarrow " Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R =$ Zeilenraum $B =$ Zeilenraum R'
 $\Rightarrow R = R'$. Also ist A zeilenäquivalent zu R und B ist zeilenäquivalent zu $R \Rightarrow A$ ist zeilenäquivalent zu B . \square

Korollar 3 A, B sind $m \times n$ -Matrizen über K . Folgende sind äquivalent:

- (1) A und B sind zeilenäquivalent.
- (2) A und B haben denselben Zeilenraum.
- (3) $B = PA$; P invertierbar $m \times m$.

Zusammenfassung

- (I) Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim von Zeilenraum von A .
 - Reduziere A zu R in r.Z.S.F..
 - Eine Basis für Zeilenraum $A = \{p_1, \dots, p_r\}$ (die nicht Nullzeilen von R).
- (II) Nun betrachten wir den Lösungsraum $\subseteq K^n$ zu $AX = 0$, wobei A eine $m \times n$ -Matrix ist. Setze $S =$ Lösungsraum. Wir berechnen eine Basis und die Dimension.
 - Reduziere A zu R in r.Z.S.F. S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$.
 - Seien p_1, \dots, p_r die nicht Nullzeilen von R und k_1, \dots, k_r die Spaltenindexe, in denen die Haupteins der Zeilen erscheinen.

Erinnerung Lösungsverfahren:
 $\{x_{k_1}, \dots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_r\}$
 $\{x_j, j \in J\}$ freie Variablen; $|J| = n - r$.

Löse

$$\left. \begin{array}{l} x_{k_1} = \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ \vdots \\ x_{k_r} = \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{array} \right\} (*) c_{ij} \in K; 1 \leq i \leq r; j \in J$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen **beliebiger** Werte für $x_j, j \in J$.
- Also sei E_j die Lösung, die man bekommt durch Einsetzen von $x_j = 1$ und $x_i = 0$ für alle $i \in J \setminus \{j\}$.

Behauptung Die $(n - r)$ -Vektoren $\{E_j; j \in J\}$ sind eine Basis für S .

Beweis

- (1) Lineare Unabhängigkeit wie oben. (Die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j -ten Zeile und 0 in den anderen Zeilen, die durch Elemente aus J indiziert sind.)
- (2) Erzeugen: folgt aus (*).

Details: ÜA. Also $\{E_j; j \in J\}$ Basis. Es gilt also: $\dim S = n - r$.

17. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 16. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Dezember 2015)

Kapitel 3: § 1 Lineare Transformationen

Beispiel 1 (i) $T = 0$.

(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identität

Beispiel 2 $V :=$ Polynomiale Funktionen über K .

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_kx^k$$

$$(Df)(x) = c_1 + 2c_2x + \cdots + kc_kx^{k-1}$$

Ableitung Operator.

Beispiel 3 Sei A eine $m \times n$ -Matrix über K .

(a) $T : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$

$$T(X) := AX$$

(b) $U : K^m \rightarrow K^n$

$$U(\alpha) = \alpha A$$

Beispiel 4 P ist eine $m \times m$ -Matrix; Q ist eine $n \times n$ -Matrix.

$$T : K^{m \times n} \rightarrow K^{m \times n}$$

$T(A) := PAQ$ ist ein linearer Operator.

Beispiel 5 $V = \{f; f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$

$$T : V \rightarrow V$$

$$f \mapsto Tf, \text{ wobei } (Tf)(x) := \int_0^x f(t)dt \text{ f\"ur } x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung Lineare Abbildungen erhalten l. K.: $T(\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j) = \sum_{j=1}^n c_j T(\alpha_j)$.

Satz 1 Sei V ein endlich dim Vektorraum über K . Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V . Seien β_1, \dots, β_n beliebige Vektoren in W .

Es existiert ein einziges $T : V \rightarrow W$ lineare Transformation mit $T(\alpha_j) = \beta_j$
für alle $1 \leq j \leq n$. (*)

Beweis

Existenz: Sei $\alpha \in V$. $\alpha = \sum x_j \alpha_j$.

Definiere $T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$. Insbesondere ist (*) erfüllt.

Ist T linear?

Sei $\gamma = y_1 \alpha_1 + \dots + y_n \alpha_n$ und sei $c \in K$. Man hat:

$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \dots + (cx_n + y_n)\alpha_n$. Also

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \dots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= (cx_1\beta_1 + y_1\beta_1) + \dots + (cx_n\beta_n + y_n\beta_n)$$

$$= (cx_1\beta_1 + \dots + cx_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n)$$

$$= c(x_1\beta_1 + \dots + x_n\beta_n) + (y_1\beta_1 + \dots + y_n\beta_n) = cT(\alpha) + T(\gamma)$$

Eindeutigkeit: Seien $T, U : V \rightarrow W$ linear mit $T(\alpha_j) = \beta_j = U(\alpha_j)$.

Zu zeigen: $T(\alpha) = U(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$.

Berechne:

$$U(\alpha) = U(\sum c_j \alpha_j) = \sum c_j U(\alpha_j) = \sum c_j T(\alpha_j) = T(\sum c_j \alpha_j) = T(\alpha). \quad \square$$

Bemerkung 1 Wir haben gezeigt:

(1) $T, U : V \rightarrow W$ lineare Transformation. Es gilt: $T = U$ genau dann, wenn $T(\alpha_j) = U(\alpha_j)$ für alle $1 \leq j \leq n$ für eine geordnete Basis $\{\alpha_j; 1 \leq j \leq n\}$ von V .

(2) Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen, dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 6

$$V = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}^3.$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = (1, 2) \\ \alpha_2 = (3, 4) \end{array} \right\} \text{Basis für } V.$$

$$\beta_1 = (3, 2, 1)$$

$$\beta_2 = (6, 5, 4)$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(1, 2) = (3, 2, 1)$$

$$T(3, 4) = (6, 5, 4)$$

$$T(e_1) = ?$$

$$e_1 = (1, 0) = (-2)(1, 2) + (3, 4)$$

$$T(e_1) = (-2)(3, 2, 1) + (6, 5, 4) = (0, 1, 2).$$

Beispiel 7

(mehr dazu in Abschnitt 3.4)

$T : K^m \rightarrow K^n$ ist eindeutig bestimmt durch $T(e_i) := \beta_i$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $\beta_i \in K^n$.

Sei $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$. $T(\alpha) = x_1\beta_1 + \dots + x_m\beta_m$.

$$\text{Setze } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \text{---} \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \text{---} \\ T(e_m) \end{pmatrix} \text{ } m \times n\text{-Matrix.}$$

Beisp., Forts. Berechne: $\alpha B = (x_1 \cdots x_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = x_1\beta_1 + \cdots + x_m\beta_m.$

$1 \times m \qquad m \times n \qquad 1 \times n.$

Also $T(\alpha) = \alpha B.$

Kapitel 3: § 2 Bild und Nullraum (Kern)

Lemma 8 Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.

- (1) $R_T := \{T(\alpha) \mid \alpha \in V\}$
 $= \{w \mid w \in W \text{ und es existiert ein } \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w\}$
 ist ein Unterraum von W .
- (2) $N := T^{-1}\{0\} := \{\alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0\}$.
 $N := \ker(T)$ ist ein Unterraum von V .

Beweis

- (1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T; c \in K \Rightarrow c\beta_1 + \beta_2 \in R_T?$
 $\beta_1 = T(\alpha_1) \quad \beta_2 = T(\alpha_2)$
 $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$.
 $T(0) = 0 \in R_T$. Also $R_T \neq \emptyset$. R_T ist ein Unterraum.
- (2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$
 $T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c0 + 0 = 0$. Also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$. Auch $0 \in N$, so dass
 $N \neq \emptyset$. □

Definition Sei V endlich dim; $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.
 $\text{rang}(T) := \dim R_T$.

18. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 20. Dezember 2011

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 17. Dezember 2015)

Bemerkung V endlich dim; $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.
 Es gilt: $R_T = T(V) \subseteq W$ (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:
 Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\alpha \in V$.
 $T(\alpha) = T(\sum c_i \alpha_i) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i \beta_i$.
 $\Rightarrow T(\alpha) \in \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Also $R_T = \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. □

Satz 1 V endlich dim; $T : V \rightarrow W$.
 Es gilt: $\dim V = \dim \ker T + \text{rang } T$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N = \ker T$. Sei $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in V$, so dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.
Behauptung: $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis für R_T .
Beweis: Aus Bemerkung 1 folgt: $\underbrace{\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)\}}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$ erzeugen R_T .

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T . Sei nun $\sum_{i=k+1}^n c_i T(\alpha_i) = 0$.

Also $T(\underbrace{\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i}_{:=\alpha}) = 0$.

Also $\alpha \in N$; es existiert $b_1, \dots, b_k \in K$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i$.

Also $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0$.

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ sind linear unabhängig also $b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$. □

Beispiel A ist eine $m \times n$ -Matrix. $T_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$
 $T_A(X) := AX$
 $\ker T_A = \text{Lösungsraum } AX = 0$.
 $R_{T_A} = \{Y \in K^{m \times 1}; \text{ existiert } X : AX = Y\}$ (*)
 Seien A_1, \dots, A_n Spalten von A . Dann ergibt (*): $Y \in R_{T_A}$ genau dann, wenn existiert X , so dass $Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$.
 Also $R_{T_A} = \text{Spaltenraum von } A$ und $\text{rang}(T_A) = \text{Spaltenrang von } A$, wobei Spaltenraum := $\text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$; Spaltenrang := \dim Spaltenraum.

Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien V, W Vektorräume über K . Wir haben gesehen, dass $\text{Fkt}(V, W) = \{f \mid f : V \rightarrow W \text{ eine Funktion}\}$ versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein K -Vektorraum ist.

Satz 2 Setze $L(V, W) := \{T \mid T : V \rightarrow W \text{ lineare Transformation}\} := L$ mit Addition $(T + U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$ für alle T und $U \in L$
 $(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \quad d \in K$.
 Es gilt: $T + U \in L$ und $dT \in L$.

Beweis $(T + U)(c\alpha + \beta) = c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta)$ (Übungsaufgabe)
 $(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$
 $= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$. □

Bemerkung $0 \in L(V, W)$; $L(V, W) \neq \emptyset$. Also $L(V, W) \subseteq \text{Fkt}(V, W)$ (Unterraum). Insbesondere ist $L(V, W)$ ein K -Vektorraum.

Satz 3 V n -dim, W m -dim über K . Dann ist $\dim L(V, W) = mn$.

Beweis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ist eine geordnete Basis von W . Für jedes (p, q) mit $1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq n$ definieren wir $E^{p,q}$ ist eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \rightarrow W$ definiert für $j = 1, \dots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq} \beta_p$$

Behauptung $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq n\}$ bilden eine Basis für L .

Beweis Sei $T : V \rightarrow W$ und $1 \leq j \leq n$. Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p$ in \mathcal{B}' für geeignete $A_{pj} \in K$.

Zwischenbehauptung: $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:=U}$,

$$\begin{aligned} \text{weil } U(\alpha_j) &= (\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q})(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T(\alpha_j) \end{aligned}$$

Also $U(\alpha) = T(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$. Also $U = T$.

Also $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq n\}$ erzeugen L .
 Linear unabhängig?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$ für $A_{pq} \in K$. Also gilt für alle $j = 1, \dots, n$:
 $U(\alpha_j) = 0$ i.e. $\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0$. Nun ist $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$ linear
 unabhängig $\Rightarrow A_{pj} = 0$ für alle p und j . \square

Satz 4 Seien V, W, Z Vektorräume über K und T, U lineare Transformationen.

$$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z.$$

Es gilt $V \xrightarrow{U \circ T} Z$ ist wieder linear.

Beweis $(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$ \square

Sonderfall $V = W = Z$. Also hat $L(V, V)$ eine Vektorenmultiplikation $UT := U \circ T$.

Bezeichnung Schreibe $T^0 := I$ (Identitätsabbildung)

$$T^2 := T \circ T$$

$$T^n := T \circ \dots \circ T$$

Definition Sei K ein Körper. Eine *lineare Algebra* L über K ist ein K -Vektorraum, versehen mit einer Vektorenmultiplikation, so dass

$$(a) \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(b) \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ und } (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(c) \quad c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) \text{ für alle } c \in K.$$

(d) Falls ein $I \in L$ existiert mit $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$ für alle $\alpha \in L$, heißt L eine lineare Algebra mit Einheit.

(e) Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in L$ heißt L kommutativ.

Lemma $L(V, V)$ ist eine K -lineare Algebra mit Einheit i.e. es gelten

$$(a) \quad I \cdot U = U \cdot I = U$$

$$(b) \quad U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2 \text{ und } (T_1 + T_2)U = T_1U + T_2U$$

$$(c) \quad c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$$

Beweis (a) Ergibt sich.

$$(b) \quad U(T_1 + T_2)(\alpha) = U((T_1 + T_2)(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha)) \\ = U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha).$$

$$\text{Auch } ((T_1 + T_2)U)(\alpha) = (T_1 + T_2)(U(\alpha)) = T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) \\ = (T_1U + T_2U)(\alpha).$$

(c) Analog. \square

19. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 10. Januar 2012

Definition 1 Sei $T : V \rightarrow W$ eine Abbildung. T ist invertierbar, wenn es eine Abbildung U gibt mit $U : W \rightarrow V$ und $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$, wobei Id die Identitätsabbildung bezeichnet: $Id(x) = x$ für alle x .

Lemma 1 T ist invertierbar $\Leftrightarrow T$ ist bijektiv.

Beweis " \Rightarrow "
 (1) $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2)) = (U \circ T)(x_2) = x_2$, also ist T injektiv.
 (2) $(T \circ U)(y) = y$, also $y = T(U(y))$ für alle $y \in W$, also ist T surjektiv.

" \Leftarrow "

T bijektiv \Leftrightarrow für alle $y \in W$ existiert genau ein $x \in V$ mit $T(x) = y$. Setze $U(y) := x$. Also wird $U : W \rightarrow V$ eindeutig definiert durch $U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$.

Berechne $U(T(x)) = x$. Setze $y := T(x)$. Also $U(T(x)) = x$.
 Analog $T(U(y)) = y$. Also $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$. □

Bezeichnung T ist invertierbar $\Rightarrow U$ ist eindeutig definiert. Schreibe $U := T^{-1}$. Also $T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = T(x)$.

Satz T ist linear und invertierbar $\Rightarrow T^{-1}$ ist linear und invertierbar.

Beweis $T^{-1}(\underbrace{c\beta_1 + \beta_2}_{:=Y}) \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:=X}$.

$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$. Also berechne $T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)) = cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$. □

Satz 2 Es seien $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$ invertierbare Abbildungen. Dann ist $L \circ G : V \rightarrow Z$ invertierbar und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$.

Beweis $(G^{-1} \circ L^{-1} \circ (L \circ G)) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G = G^{-1} \circ G = I$.
 Andere: Analog. □

Definition und Bezeichnung 2 $GL_k(V) := \{T \mid T : V \rightarrow V \text{ invertierbare lineare Abbildung}\}$.

Bemerkung Wir haben gerade gezeigt, dass $GL_k(V)$ mit der Verknüpfung \circ eine Gruppe ist. $GL_k(V)$ ist die *allgemeine lineare Gruppe* (general linear group).

Definition 3 T ist *singulär*, falls $\ker(T) \neq \{0\}$ ist. Sonst heißt T *regulär* oder *nicht singulär*. Also bedeutet T regulär: $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Satz 3 $T : V \rightarrow W$ ist regulär $\Leftrightarrow T$ bildet eine linear unabhängige Teilmenge von V auf eine linear unabhängige Teilmenge von W .

Beweis " \Rightarrow "

Sei $\ker(T) = \{0\}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ linear unabhängig in V . Zu zeigen: $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)$ linear unabhängig.

Sei $c_1T(\alpha_1) + \dots + c_kT(\alpha_k) = 0$. Also $T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$. Also $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \in \ker(T)$. Also $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ linear unabhängig $\Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$. \square

Korollar 4 Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$ und $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Es gilt T ist injektiv $\Leftrightarrow T$ ist surjektiv.

Beweis Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 1, Vorlesung 18) an.

$d = \text{rang}(T) + \dim \ker(T)$. Also T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow$

$\dim \ker(T) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$ surjektiv. \square

20. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 13. Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Januar 2016)

Kapitel 3: § 4 Matrix-Darstellung von linearen Transformationen

Ansatz Seien V und W zwei K -Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.
 Seien $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine geordnete Basis für V und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_m\}$ eine geordnete Basis für W .

Definition 1 T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$. Schreibe

$$[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, \dots, n$$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := \left([T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Diese $m \times n$ -Matrix heißt die *Matrix-Darstellung von T bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{B}'* . Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$?

Satz 1 Es gilt für $\alpha \in V$: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}[\alpha]_{\mathcal{B}}$ (*)

Beweis Setze $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Nun ist } [T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}. \text{ Also ist } T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i.$$

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j T(\alpha_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \alpha'_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \alpha'_i.$$

$$\text{Es folgt: } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n A_{mj} x_j \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Behauptung (*) bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig !

Beispiel 1 Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Wir haben zwei lineare Abbildungen dazu assoziiert:

(1) $T : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ mit $T(x) := Ax$

(2) $U : K^m \rightarrow K^n$ mit $U(\alpha) := \alpha A$.

(1) Seien \mathcal{E} und \mathcal{E}' die Standard-Basen für $K^{n \times 1}$ und $K^{m \times 1}$. Wir berechnen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$. Setze $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m\}$, $\mathcal{E}' = \{\mathcal{E}'_1, \dots, \mathcal{E}'_m\}$

Dafür berechne $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'}$. Nun haben wir

$$T(\mathcal{E}_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = j\text{-te Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^m A_{ij} \mathcal{E}'_i.$$

Also $[T(\mathcal{E}_j)]_{\mathcal{E}'} = j\text{-te Spalte von } A$, insbesondere haben wir $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A$.
□

(2) Für (2) siehe ÜB.

Satz 2 Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : L(V, W) &\rightarrow K^{m \times n} \\ T &\mapsto [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie von K -Vektorräumen.

Beweis Ist ρ linear?

Berechne

$$\rho(cT_1 + T_2) = [cT_1 + T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = ([(cT_1 + T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \mid \cdots \mid [(cT_1 + T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'}) = ?$$

Nun haben wir

j -te Spalte von $\rho(cT_1 + T_2)$

$$\begin{aligned} \overbrace{[(cT_1 + T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}} &= [cT_1(\alpha_j) + T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \\ \underbrace{c[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_1)} &+ \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j\text{-te Spalte von } \rho(T_2)} \end{aligned}$$

Also: Die j -te Spalte von $\rho(cT_1 + T_2)$ ist gleich wie die j -te Spalte von $\rho(T_2)$ plus c -mal die j -te Spalte von $\rho(T_1)$. Also

$$\rho(cT_1 + T_2) = c\rho(T_1) + \rho(T_2).$$

Ist ρ injektiv?

Sei $T \in L(V, W)$ mit $\rho(T) = 0_{m \times n}$.

Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $j = 1, \dots, n$.

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Also ist T identisch mit der Nullabbildung. Daraus folgt, dass ρ surjektiv ist, weil $mn = \dim L(V, W) = \dim K^{m \times n}$ (siehe ÜB). \square

Sonderfall Wir betrachten $T : V \rightarrow V$ ist ein linearer Operator und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.

Definition und Bezeichnung 2 Schreibe $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$ ist die *Matrixdarstellung des Operators in der Basis* \mathcal{B} . Hier gilt also die folgende Version von (*):

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die Matrixdarstellung

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{U} Z \text{ und } V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

Ansatz:

V, W, Z sind endlich dim K -Vektorräume. T, U sind lineare Abbildungen.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für V

$\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ist eine Basis für W

$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, \dots, \gamma_p\}$ ist eine Basis für Z

Setze $A = [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ und $C = [U \circ T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = ?$

Satz 3 $C = BA$.

Beweis $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \stackrel{(*)}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \stackrel{(*)}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$.

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$. (*) erfüllt also die Matrix BA bezüglich $U \circ T$. Die Eindeutigkeit impliziert nun unsere Behauptung. \square

21. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 17. Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 14. Januar 2016)

Ansatz Wie in Vorlesung 20: V ist endlich-dimensional mit Dimension n ; \mathcal{B} ist eine geordnete Basis für V .

Korollar 1 $\rho : L(V, V) \rightarrow K^{n \times n}$. $\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$ ist ein K -Algebren Isomorphismus.

Beweis ρ ist ein K -Vektorraum-Isomorphismus. Ferner gilt $\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2)$. \square

Korollar 2 $T : V \rightarrow V$. Es gilt: T ist invertierbar genau dann, wenn $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar ist. In diesem Fall gilt ferner $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis T ist invertierbar \Leftrightarrow es existiert T^{-1} mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$
 $\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}}$
 $\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = I_n$
 $\Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}$. \square

Ansatz V endlich dim. $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ und $\mathcal{B}' = \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$ sind zwei geordnete Basen für V . $T \in L(V, V)$.

Fragestellung Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

Lösung Satz 1 aus Vorlesung 15 liefert eine invertierbare \underline{P} , so dass für alle $\alpha \in V$ gilt
 $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ (**)

Und Satz 1 aus Vorlesung 20 $[T]_{\mathcal{B}}$ so, dass für alle $\alpha \in V$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

$$\text{Nun gilt (**) für } T(\alpha) \in V: [T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \quad (***)$$

(*), (**) und (***) liefern

$$[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \quad \text{oder} \quad (\underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P})[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also erfüllt $(\underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P})$ die bestimmende matrixielle Gleichung (*) bezüglich der Basis \mathcal{B}' . Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der (*) liefert nun

$$[T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\underline{P}, \text{ wobei } \underline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & & \\ \hline \cdots & & \\ \hline [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} & & \end{array} \right).$$

Bemerkung Betrachte die Abbildung $\pi : V \rightarrow V$. Die lineare Abbildung ist eindeutig definiert durch die Angaben $\pi(\alpha_j) := \alpha'_j$ für alle $j = 1, \dots, n$. Dieser Operator ist invertierbar, da er eine *Basis auf eine Basis abbildet* (Korollar zu Satz 3, Vorlesung 19). So die Matrix-Darstellung $[\pi]_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar. Es ist

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = ([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}}) = ([\alpha'_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [\alpha'_n]_{\mathcal{B}}) = \underline{P}.$$

\underline{P} heißt deshalb "Matrix der Basiswechsel".

Wir haben bewiesen:

Satz 1

(Ansatz wie oben)

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\pi]_{\mathcal{B}}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} [\pi]_{\mathcal{B}} \text{ oder } [T]_{\mathcal{B}'} = \underline{P}^{-1} [T]_{\mathcal{B}} \underline{P}.$$

Definition 1 Seien $A, B \in K^{n \times n}$. wir sagen B ist zu A *ähnlich*, falls es eine invertierbare $\underline{P} \in K^{m \times n}$ gibt, so dass $B = \underline{P}^{-1} A \underline{P}$.

Wir haben in Satz 1 bewiesen:

Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix-Darstellungen des Operators T bezüglich der Basen \mathcal{B}' bzw. \mathcal{B} , dann ist B zu A ähnlich. Tatsächlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 2

B ist ähnlich zu A genau dann, wenn B und A denselben linearen Operator (bezüglich geeigneter Basen) darstellen.

Beweis

" \Leftarrow " Bereits gemacht. Sei nun \mathcal{B} eine beliebige Basis.

" \Rightarrow " Sei T der eindeutig durch $[T]_{\mathcal{B}} = A$, d.h. $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} := A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ definierte Operator. (*)

Sei ferner \underline{P} eine invertierbare Matrix so, dass $B = \underline{P}^{-1} A \underline{P}$. Sei \mathcal{B}' die Basis, erhalten von \underline{P} , d.h. wofür

$$\underline{P} = \left(\begin{array}{c|c|c} [\alpha'_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [\alpha'_n]_{\mathcal{B}} \end{array} \right)$$

sein sollte. Diese Angabe bestimmt also, dass

$$[\alpha'_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}, \text{ d.h. } \alpha'_j := \sum_{i=1}^n P_{ij} \alpha_i.$$

Behauptung: Es gilt $[T]_{\mathcal{B}'} = B$. (ÜA, siehe ÜB). □

Exkurs

Definition: Sei $R \subseteq S \times S$ eine Relation.

Schreibe $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$. R heißt Äquivalenzrelation, falls:

- (1) xRx für alle $x \in S$ (Reflexivität);
- (2) $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in S$ (Symmetrie);
- (3) $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in S$ (Transitivität).

Beispiel B ähnlich A ist eine Äquivalenzrelation auf $K^{n \times n}$:

$$(1) \quad B = I_n^{-1} B I_n$$

$$(2) \quad B = P^{-1} A P \Rightarrow A = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B (P^{-1})$$

Setze $Q := P^{-1}$. Also $A = Q^{-1} B Q$

$$(3) \quad \left. \begin{array}{l} B = P^{-1} A P \\ C = Q^{-1} B Q \end{array} \right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1} A (PQ)$$

□

Mehr dazu im Übungsblatt.

22. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 20. Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Kapitel 3: § 5 Lineare Funktionale

Bemerkung 1 $W = K^1$ ist ein K -Vektorraum. $\dim(W) = 1$. Die Standard-Basis ist $\{1\}$.
 $W' \subseteq V$ ist ein Unterraum $\Rightarrow W' = \{0\}$ oder $W' = V$. Also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$ und $\dim W' = 1$ genau dann, wenn $W' \neq \{0\}$.

Definition 1 $f \in L(V, K)$ heißt ein *lineares Funktional*.

Beispiel 1 $V = K^n$; \mathcal{E} ist die Standard-Basis. Sei $(a_1, \dots, a_n) \in V$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i x_i$ (*).

Es gilt $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E}, \{1\}} = [a_1, \dots, a_n]$. Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$.
 Setze $a_j := f(\mathcal{E}_j)$, dann erfüllt f (*) für (a_1, \dots, a_n) .

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis.
 Sei $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \rightarrow K$ durch $f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i$. (*)

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B}, \{1\}} = [[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \mid \dots \mid [f(\alpha_n)]_{\{1\}}] =$
 $([a_1]_{\{1\}} \mid \dots \mid [a_n]_{\{1\}}) = [a_1, \dots, a_n]$.

Und umgekehrt: $f \in L(V, K)$, setze $a_i = f(\alpha_i)$, dann ist f wie in (*).

Beispiel 2 $V = K^{n \times n}$; $tr : V \rightarrow K$
 $tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ ist ein lineares Funktional.

Beispiel 3 Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $V = C([a, b]) := \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ stetig}\}$.
 Setze $f(g) := \int_a^b g(t) dt$ für $g \in V$. Dann gilt $f \in L(V, \mathbb{R})$.

Definition und Notation 2 $V^* = L(V, K)$ heißt der *Dualraum*. Sei nun $\dim V = n$.

Bemerkung 2 $\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ für V werden wir nun eine Basis \mathcal{B}^* von V^* zuordnen. Satz 1 in der Vorlesung 17 liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$.

Behauptung $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für V^* . Es genügt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind.

Beweis Für $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ mit $c_i \in K$ gilt für alle $j = 1, \dots, n$:

$$f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \quad (**)$$

Insbesondere wenn $f = 0$, dann gilt $f(\alpha_j) = 0$ für alle j , d.h. $c_j = 0$ für alle j . \square

Definition 3 $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt die *Dualbasis* zu \mathcal{B} .

Satz 1 Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V . Es existiert genau eine (Dual)Basis $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ für V^* . Es gelten

$$(1) f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$$

$$(2) \text{ und } f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i \text{ für alle } f \in V^*$$

$$(3) \text{ und } \alpha = \sum_{i=1}^n f_i(\alpha) \alpha_i \text{ für alle } \alpha \in V.$$

Das heißt für alle $f \in V^*$ und für alle $\alpha \in V$ gilt:

$$[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix} \text{ und } [\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ \vdots \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Dualität.}$$

Beweis (1) Ergibt sich.

$$(2) f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i \text{ und } (**) \text{ liefert } c_j = f(\alpha_j) \text{ für alle } j = 1, \dots, n.$$

$$(3) \text{ Analog: } \alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j(\sum x_i \alpha_i) = x_j. \quad \square$$

Bemerkung 3 (3) beschreibt f_i als die " i -te Koordinatenfunktion bezüglich der Basis \mathcal{B} ".

$f_i : V \rightarrow K; \alpha \mapsto$ die i -te Koordinate in $[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Bemerkung 4 $f \in V^*; f \neq 0; \text{Im}(f) \subseteq K$ ist ein Unterraum; $\text{Im}(f) \neq \{0\}$, also ist $\text{Im}(f) = K$ (Bemerkung 1). Es gilt $\dim(\text{Im} f) = R_f = 1$. Der Dimensionssatz impliziert nun $\dim \ker(f) + 1 = n$, also $\dim \ker(f) = n - 1$ (wobei $n := \dim V$).

Definition 4 Sei $\dim(V) = n$ und $W \subseteq V$ ein Unterraum mit $\dim W = n - 1$, dann heißt W *Hyperraum* (oder *Hyperebene* oder Unterraum der *Kodimension 1*).

Bemerkung 4 besagt, dass wenn $f \in V^*$ und $f \neq 0$, dann gilt, dass $\ker(f) \subseteq V$ ein Hyperraum ist. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.

23. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl

WS2011/2012: 24. Januar 2012

(WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Definiton 1 Sei V ein K -Vektorraum $\dim V = n$, $S \subseteq V$.
 Annihilator S ist bezeichnet mit S^0 und definiert als
 $S^0 = \{f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f)\} = \{f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } \alpha \in S\}$.

Bemerkungen

- (i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$
- (ii) $S^0 = (\text{span}(S))^0$
- (iii) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum.
- (iv) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$
- (v) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$
- (vi) Also $\text{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$

Beweis von (iv) " \Rightarrow " ist klar.
 Für " \Leftarrow ": Sei $S^0 = V^*$. Zu zeigen $S = \{0\}$. Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \in S$. $\{\alpha\}$ ist linear unabhängig \Rightarrow ergänze zu einer Basis \mathcal{B} für V :
 $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.
 Sei \mathcal{B}^* die Dualbasis: $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$. Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$, also $f_1 \notin S^0$. \square

Beweis von (vi) " \Rightarrow " Schon gemacht.
 " \Leftarrow " Sei $S^0 = \{0\}$. Zu zeigen $\text{span}(S) = V$.
 Zum Widerspruch setze $W := \text{span}(S)$ und sei
 $\alpha \in V \setminus W$ und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq W$ eine Basis für W . Dann ist
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ linear unabhängig.
 Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_n\}$.
 Sei $\{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ die Dualbasis. Es gilt $f_{k+1}(\alpha_j) = 0$ für
 alle $j = 1, \dots, k$ und $f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$. Also $f_{k+1} \notin S^0$. \square

Korollar 1 (Trennungseigenschaft)
 Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert ein $f \in V^*$ mit $f(W) = \{0\}$
 und $f(\alpha) \neq 0$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W . Nun ist $\alpha \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, also $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ ist linear unabhängig.
Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ und sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ die Dualbasis. Setze $f := f_{k+1}$. \square

Satz 1 (Dimensionsformel für Annihilatoren)

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K und $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W . Ergänze zu einer Basis für V : $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis.

Behauptung $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für W^0 .

Beweis Es ist klar, dass $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$, weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$, falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$. Also wenn $\alpha \in W$, ist α eine lineare Kombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und $f_i(\alpha) = 0$ für alle $i \geq k+1$. Also $f_i \in W^0$ für alle $i \geq k+1$ wie behauptet.

Nun ist $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ linear unabhängig (Teil einer Basis). Also genügt es zu zeigen, dass $\text{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$.

Sei $f \in V^*$. Es gilt $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) f_i$ (allgemein). Ist aber $f \in W^0$, dann gilt $f(\alpha_i) = 0$ für alle $i \leq k$. Also gilt $f = \sum_{i=k+1}^n f(\alpha_i) f_i$. \square

Korollar 2 Sei $\dim W = k$, $\dim V = n$; $W \subseteq V$ ein Unterraum.

Es gilt: W ist der Durchschnitt von $(n-k)$ Hyperebenen von V .

Beweis In der Notation des obigen Beweises: $W = \bigcap_{i=k+1}^n \ker(f_i)$. \square

Bemerkung Ist W eine Hyperebene. $\dim W = n-1$. Also ist $W = \ker(f_n)$ (wie angekündigt).

Korollar 3 W_1, W_2 sind Unterräume von V . Es gilt: $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Beweis Zum Widerspruch sei $W_1 \neq W_2$, zum Beispiel $\alpha \in W_2, \alpha \notin W_1$. Nach Korollar 1 existiert $f \in V^*$ mit $f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$. Also $f \in W_1^0$, aber $f \notin W_2^0$, ein Widerspruch. \square

24. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 27 Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Beobachtung Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

$$\text{Sei } \left\{ \begin{array}{l} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \text{ homogenes Gleichungssystem} \quad (*)$$

mit Koeffizienten in Körper K

Definiere für $i = 1, \dots, m$ ein Funktional auf K^n :

$$f_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

Es gilt: Lösungsraum von $(*) = \bigcap_{i=1}^m \ker(f_i)$ (folgt unmittelbar aus den Definitionen). Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 1

$V = \mathbb{R}^5$; $W = \text{span} \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, wobei gilt:

$$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1),$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2),$$

$$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3) \text{ und}$$

$$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0) \text{ ist.}$$

Finde W^0 .

$$\text{Sei } f \in V^*. \text{ Es gilt allgemein } f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^n c_j x_j.$$

Insbesondere: (homogenes Gleichungssystem in c_1, \dots, c_5)

$$f \in S^0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^5 A_{ij}c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4$$

wobei A_{ij} die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix A des (HGS) i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (GEV)} \Rightarrow \text{r. Z. S. F. :}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5$

c_1, c_3, c_5 sind Hauptvariablen und c_2 und c_4 sind freie Variablen.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für $\sum_{j=1}^5 R_{ij}c_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq 3$
i.e.

$$\begin{array}{rcccc} c_1 & - & c_2 & - & c_4 & = & 0 \\ & & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ & & & & c_5 & = & 0 \end{array}$$

Setze $c_2 = a$ und $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$, dann sind

$c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$ und $c_5 = 0$ und

$W^0 = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Es gilt $\dim W^0 = 2$.

Eine Basis für W^0 erhält man z.B. durch einsetzen von

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \quad b = 0 \\ a = 0 \quad b = 1 \end{array} \right\} \text{ und } \left. \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array} \right\} \text{ ist eine Basis für } W^0$$

□

Kapitel 3: § 6 Bi-Dual

Sei V ein endlich dim Vektorraum über K .

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

$$(1) V \longrightarrow V^*$$

$$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$$

Umkehrung? Sei \mathbb{B} eine Basis für V^* . Existiert eine Basis \mathcal{B} für V , so dass $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

$$(2) V \longrightarrow V^*$$

$$W \longmapsto W^0$$

Umkehrung? Sei U ein Unterraum von V^* . Existiert ein Unterraum W von V , so dass $U = W^0$?

Schlüssel Wir betrachten $(V^*)^* = V^{**}$.

Bemerkung $\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Terminologie und Definition Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt der *Bi-Dualraum* zu V .

Proposition 1 Sei $\alpha \in V$. α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in V^*.$$

Beweis $L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$ □

Satz 1 Die Abbildung $\lambda : V \longrightarrow V^{**}$
 $\alpha \longmapsto L_\alpha$

ist ein Isomorphismus.

Beweis $\lambda(c\alpha + \beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$?

Zu zeigen ist also $[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$ für alle $f \in V^*$.

Wir berechnen:

$$[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = L_{c\alpha + \beta}(f) = f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta) = cL_\alpha(f) + L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f).$$

Also ist λ linear. Wir zeigen, dass λ bijektiv ist. Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$ zu beweisen: λ ist regulär.

Sei $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\alpha) = 0 \\ \text{i.e. } L_\alpha = 0 \end{array} \right\}$ zu zeigen $\alpha = 0$.

Zum Widerspruch $\alpha \neq 0$, also ist $\{\alpha\}$ linear unabhängig.

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis. Es gilt $f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$. Also $L_\alpha(f_1) \neq 0$. Also $L_\alpha \neq 0$, ein Widerspruch. □

25. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 31. Januar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 25. Januar 2016)

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

Korollar 1 Sei L ein lineares Funktional auf V^* . Es existiert genau ein $\alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$,
 i.e. $L(f) = f(\alpha)$ für alle $f \in V^*$ (**)

Beweis Setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$ □

Korollar 2 Sei \mathbb{B} eine Basis für V^* . Dann existiert eine Basis \mathcal{B} für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$.

Beweis Setze $\mathbb{B} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Satz 1 (aus Vorlesung 22) liefert eine Dual-Basis zu
 $\mathbb{B}; \mathbb{B}^* := \{L_1, \dots, L_n\}$ für $(V^*)^* = V^{**}$
 so dass $L_i(f_j) = \delta_{ij}$.

Korollar 1 liefert: Für alle i existiert genau ein $\alpha_i \in V$ mit (**), i.e.
 $L_i(f) = f(\alpha_i)$ für alle $1 \leq i \leq n; f \in V^*$.

Insbesondere: $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n$.
 Setze nun $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ □

Bemerkung Sei $E \subseteq V^*$, dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$.
 $E^0 = \{L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \text{ für alle } f \in E\}$.

Wir berechnen:

$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \text{ für alle } f \in E \} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in E \} \end{cases} \quad (\dagger)$$

Satz 2 Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Es gilt $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$.

Beweis $\dim W + \dim W^0 = \dim V = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00}$. Dann gilt $\dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$.

Es genügt nun zu zeigen, dass

$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in W^0\}$
 (siehe (\dagger)). Aber $\alpha \in W$, also $f(\alpha) = 0$ für alle $f \in W^0$ per Definition! □

Korollar 3 Sei $U \subseteq V^*$ ein Unterraum. Setze $W := \lambda^{-1}(U^0)$. Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis $\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$. Also $\dim U = \dim W^0$
 (weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$).

Es genügt zu zeigen, dass $U \subseteq W^0$.

$W = \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \text{ für alle } f \in U\}$ (siehe (\dagger)). Sei $f \in U$, dann gilt
 $f(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in W$. Also $f \in W^0$ per Definition. □

Kapitel 3: § 7 Die transponierte Abbildung

Ansatz wie immer.

Sei $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation. T induziert eine Abbildung $T^t : W^* \rightarrow V^*$ definiert durch $V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T$ für $g \in W^*$, das heißt $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $\alpha \in V$.

Behauptung T^t ist linear: $c \in K; g_1, g_2 \in W^*$. $T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T) = cT^t(g_1) + T^t(g_2)$.

Wir haben bewiesen:

Satz 3 Sei V, W ein (endlich dim) Vektorraum über K . Für jede lineare Abbildung $T : V \rightarrow W$ existiert genau ein (auch lineares) $T^t : W^* \rightarrow V^*$, so dass $T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha))$ für alle $g \in W^*, \alpha \in V$.

26. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 7. Februar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 1. Februar 2016)

Definition T^t ist die transponierte Abbildung zu T .

Satz 1 Es gelten:

- (0) $\ker(T^t) = (R_T)^0$
(Nullraum des transponierten $T^t =$ Annihilator von Bild T)
- (1) $\text{Rang}(T^t) = \text{Rang}(T)$
- (2) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$
(Bild des transponierten $T^t =$ Annihilator von Nullraum T)

Beweis (0) $g \subseteq \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0 \Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0$ für alle $\alpha \in V \Leftrightarrow g \in (R_T)^0$

- (1) Setze $\dim V = n$ und $\dim W = m$. $r := \text{Rang}(T) := \dim R_T$.

Satz 1 aus der 23. Vorlesung impliziert:

$$\dim(R_T) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m.$$

$$\text{Also } r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r.$$

Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$. Nun ist $T^t : W^* \rightarrow V^*$ und Satz 1 aus der 18. Vorlesung liefert $\text{Rang}(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m$.

$$\text{Also } \text{Rang}(T^t) = m - (m - r) = r.$$

- (2) Setze $N := \ker(T)$.

Behauptung: $R_{T^t} \subseteq N^0$.

Beweis: Sei $f \in R_{T^t}$. Also $f = T^t(g)$. $f \in V^*$ für ein $g \in W^*$.

Sei $\alpha \in N$ und berechne: $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0$.

Andererseits haben wir wieder

$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t)$$

(ergibt sich aus (1)).

Das heißt $R_{T^t} \subseteq N^0$ und $\dim R_{T^t} = \dim N^0$. Also $R_{T^t} = N^0$. □

Satz 2 Seien V, W endlich dim Vektorräume über K . $T : V \rightarrow W$ und $T^t : W^* \rightarrow V^*$ sind lineare Abbildungen. Sei \mathcal{B} eine geordnete Basis für V und \mathcal{B}^* die Dualbasis und sei \mathcal{B}' eine geordnete Basis für W und $(\mathcal{B}')^*$ die Dualbasis. Es gilt:

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}^t = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*, \mathcal{B}^*}.$$

Beweis **Erinnerung:** Sei A eine $m \times n$ -Matrix, dann ist A^t eine $n \times m$ -Matrix und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$.

Setze $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}$.

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ und $(\mathcal{B}')^* = \{g_1, \dots, g_m\}$.

Per Definition gilt:

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij}\beta_i \text{ für alle } j = 1, \dots, n \quad (*)$$

$$T^t g_j = \sum_{i=1}^n B_{ij}f_i \text{ für alle } j = 1, \dots, m \quad (**)$$

Wir berechnen nun

$$((T^t)(g_j))(\alpha_i) = g_j(T(\alpha_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^m A_{ki}\beta_k\right) = \sum_{k=1}^m A_{ki}g_j(\beta_k) = \sum_{k=1}^m A_{ki}\delta_{jk} = A_{ji}.$$

Nun für ein beliebiges $f \in V^*$: $f = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i)f_i$ (Darstellung zur Basis \mathcal{B}^*).

Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^n B_{ij}f_i = T^t g_j = \sum_{i=1}^n T^t g_j(\alpha_i)f_i = \sum_{i=1}^n A_{ji}f_i.$$

Da \mathcal{B}^* eine Basis ist, ist die Darstellung jedes f eindeutig, also $B_{ij} = A_{ji}$ wie behauptet. \square

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist.

Erinnerung (i) $Sr(A)$: Spaltenrang von A = Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(ii) $Zr(A)$: Zeilenrang von A = Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

Satz 3 K ist ein Körper. $A \in Mat_{m \times n}(K)$. Dann ist $Zr(A) = Sr(A)$.

Beweis Es sei \mathcal{E}_n die Standardbasis für K^n und \mathcal{E}_m die Standardbasis für K^m . $T: K^n \rightarrow K^m$ gegeben durch

$$T((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m), \text{ wobei } y_i := \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

Es ist $[T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$. (ÜA).

Offenbar ist $Sr(A) = \text{Rang}(T)$, denn Bild (T) besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A . Außerdem ist $Zr(A) = Sr(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t . Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:

$$Sr(A) = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t) = Sr(A^t) = Zr(A), \text{ da } A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*, \mathcal{E}_n^*}. \quad \square$$

Definition $\text{Rang}(a) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$.

Kapitel 3: § 8 Quotientenräume

Es sei V ein K -Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum.

Definition Für alle $\alpha, \beta \in V$ gilt $\alpha \equiv \beta \pmod{W}$ (Kongruenz: α kongruent zu β modulo W), falls $\alpha - \beta \in W$.

Lemma $\equiv \pmod{W}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V .

Beweis

- (1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$
- (2) Symmetrisch: $\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$
- (3) Transitiv: Sind $\alpha - \beta \in W$ und $\beta - \gamma \in W$,
so auch $\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. □

Definition Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \pmod{W}\}$$

die Restklasse von α mod W .

$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen Restklassen von W .

Notation $V/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$.

Bemerkung Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$. Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch $\alpha + W$ schreiben. Also ist $V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$.

27. Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I
Prof. Dr. Salma Kuhlmann, Dr. Merlin Carl
WS2011/2012: 10. Februar 2012
 (WS 2015/2016: Korrekturen vom 1. Februar 2016)

Erinnerung (1) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenklasse von $\alpha \bmod W$. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt *Repräsentant* der Äquivalenzklasse.

(2) $V/W :=$ Menge der Nebenklassen. Versehen mit einer Verknüpfung $+$:
 $(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$
 und einer Verknüpfung *Skalarmultiplikation*:
 $c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W$ für $c \in K$.

Lemma Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten, i.e.

- (a) $\alpha \equiv \alpha' \bmod W$ und $\beta \equiv \beta' \bmod W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$
- (b) $\alpha \equiv \alpha' \bmod W$ und $c \in K \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$.

Beweis (a) $\alpha - \alpha' \in W$ und $\beta - \beta' \in W \Rightarrow \underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W} = (\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$.

(b) $\alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$. \square

Lemma 1 V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K -Vektorraum.

Beweis ÜA: Was ist 0?
 $0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W .
 Was ist eine additive Inverse?
 $(\alpha + W) + ((-\alpha) + W) = 0 + W = W = 0_{V/W}$. \square

Notation $\bar{\alpha} := \alpha + W$. Also

(i) $\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$

(ii) $\overline{c\alpha_1} = c\bar{\alpha}_1$

(iii) $\bar{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$

Satz 1 (Die kanonische Projektion)
 $\pi_W : V \rightarrow V/W$
 $\pi_W(\alpha) := \bar{\alpha}$ ist eine surjektive lineare Transformation mit $\ker(\pi_W) = W$.

Beweis $\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + \alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) = c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$.
 Sei $\bar{\alpha} \in V/W$, dann ist $\bar{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.
 $\alpha \in \ker(\pi_W) \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 0_{V/W} \Leftrightarrow \alpha + W = W \Leftrightarrow \alpha \in W$. \square

Korollar 1 $\dim W + \dim(V/W) = \dim V$.

Satz 2 (Homomorphiesatz)
Seien V, Z zwei K -Vektorräume und $T : V \rightarrow Z$ linear. Es gilt:
 $V/\ker(T) \simeq R_t$.

Beweis Definiere $\bar{T} : V/\ker(T) \rightarrow R_T$ mit $\bar{T}(\alpha + \ker(T)) = \bar{T}(\bar{\alpha}) = T(\alpha)$.

(i) Ist \bar{T} wohldefiniert? $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}' \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$?

$$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$$

(ii) Linear?

$$\bar{T}(\bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2) = \bar{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) = T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \bar{T}(\bar{\alpha}_1) + \bar{T}(\bar{\alpha}_2).$$

Analog zeigt man: Für $c \in K$ und $\alpha \in V$ ist $\bar{T}(c\bar{\alpha}) = c\bar{T}(\bar{\alpha})$.

(iii) $T(\alpha) \in R_T$. Es ist $\bar{T}(\bar{\alpha}) = T(\alpha)$. Also ist \bar{T} surjektiv.

(iv) \bar{T} injektiv?

$\bar{\alpha} \in \ker(\bar{T}) \Leftrightarrow \bar{T}(\bar{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \bar{\alpha} = 0$. So ist \bar{T} regulär. \square

Korollar 2

$$\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W',$$

wobei W, W' Unterräume von V und $V = W \oplus W'$ sind.

Beweis $V = W \oplus W'$ bedeutet für alle $v \in V$, dass genau ein $w \in W$ und genau ein $w' \in W'$ existieren, so dass $v = w + w'$.

Definiere $P_{W'} : V \rightarrow W'; v \mapsto w'$.

ÜA: Ist $P_{W'}$ linear? Surjektiv?

$$v \in \ker(P_{W'}) \Leftrightarrow P_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0 \Leftrightarrow v \in W.$$

Satz 2 $\Rightarrow V/\ker(P_{W'}) \simeq \text{Bild}(P_{W'})$. \square

Korollar 3

wobei $W \subseteq V$ ein Unterraum ist. $(V/W)^* \simeq W^0$,

Beweis Sei $\pi_W : V \rightarrow V/W$. Betrachte $\pi_W^t : (V/W)^* \rightarrow V^*$. Setze $T := \pi_W$.

$$R_{T^t} = (\ker(T))^0 = W^0. \ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}.$$

Also ist T^t regulär und surjektiv auf W^0 . \square

Fragestellung Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum. Was ist die Beziehung zwischen W^* und V^* ?

Korollar 4

wobei $W \subseteq V$ ein Unterraum ist. $W^* \simeq V^*/W^0$,

Beweis 1 $Id : W \longrightarrow V$ Identitätsabbildung

$$Id^t : V^* \longrightarrow W^*$$

$$\ker(Id^t) = (R_{Id})^0 = W^0$$

$$R_{Id^t} = (\ker(Id))^0 = (\{0\})^0 = W^*. \quad \square$$

Beweis 2 Übungsaufgabe

Betrachte die Abbildung $\rho : V^* \longrightarrow W^*$; $\rho(f) := f/W$ (die Restringierung).

Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ ?

Benutze Homomorphiesatz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ). \square