

10 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Korollar 10.1.

Seien A , eine $n \times n$ -Matrix, invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen, die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1} .

Beweis

Die elementaren Zeilenumformungen werden durch Multiplikation (links) mit elementaren Matrizen erreicht, d.h. $E_\ell \dots E_1 A = I_n$. Aber dann gilt: $A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n$. \square

Beispiel 10.2.

$$(A \mid I_n) \rightarrow (I_n \mid A^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-2)Z_1 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-1)Z_1 + Z_3} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{3Z_3 + Z_2} \\ \xrightarrow{(-3)Z_3 + Z_1} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Kapitel 2: § 1 Vektorräume

Definition 10.3.

Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen

(i) Skalarmultiplikation

$$\begin{aligned} \bullet & : K \times V \rightarrow V \\ (c, v) & \mapsto cv \text{ und} \end{aligned}$$

(ii) Vektorsumme

$$\begin{aligned} + & : V \times V \rightarrow V \\ (v_1, v_2) & \mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Das Triple $(V, \bullet, +)$ ist ein K -Vektorraum (K -VR) oder ein Vektorraum über K (VR/ K), falls die folgenden Axiome erfüllt sind: $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe und

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \alpha &= \alpha & \forall \alpha \in V \\ (c_1 c_2) \alpha &= c_1 (c_2 \alpha) & \forall c_1, c_2 \in K \\ c(\alpha_1 + \alpha_2) &= c\alpha_1 + c\alpha_2 & \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ (c_1 + c_2)\alpha &= c_1\alpha + c_2\alpha & \forall c \in K \end{aligned} \right\}$$

Beispiel 10.4.

$V = K^n$ mit koordinatenweisen Verknüpfungen.

Beispiel 10.5.

Allgemeiner: $K^{m \times n} := \text{Mat}_{m \times n}(K) :=$ die Menge aller $m \times n$ -Matrizen mit Koeffizienten aus K und Matrixsumme und skalarvielfach.

Beispiel 10.6.

Sei S eine Menge.

$$V := \{f; f : S \rightarrow K; f \text{ Abbildung}\}$$

$V := K^S$ mit Funktionensummen und skalarvielfach.

Beispiele 10.4 und 10.5 sind Sonderfälle von Beispiel 10.6.

Beispiel 10.7.

Der VR der Polynomfunktionen über K

$$f(x) = c_0 + c_1 x^1 + \dots + c_n x^n, c_i \in K.$$

Beispiel 10.8.

K / k eine Körpererweiterung.

Proposition 10.9.

Für $c \in K, \alpha \in V$

$$(1) \quad c \cdot 0 = 0$$

$$(2) \quad 0 \cdot \alpha = 0$$

$$(3) \quad c \cdot \alpha = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ oder } \alpha = 0$$

$$(4) \quad (-1) \cdot \alpha = -\alpha$$

Definition 10.10.

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$; $\alpha \in V$ ist eine *lineare Kombination* (von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$), wenn es $c_1, \dots, c_n \in K$ gibt mit $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i$.

Proposition 10.11.

$$\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$$

$$c \sum c_i \alpha_i = \sum (cc_i) \alpha_i.$$