

# 18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

## Bemerkung 18.1.

$V$  endlich dim;  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Transformation.

Es gilt:  $R_T = T(V) \subseteq W$  (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:

Sei  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$  und  $\alpha \in V$ . Setze  $\beta_i := T(\alpha_i)$ .

$$T(\alpha) = T\left(\sum c_i \alpha_i\right) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i \beta_i.$$

$\Rightarrow T(\alpha) \in \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . Also  $R_T = \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ . □

## Satz 18.2.

$V$  endlich dim;  $T : V \rightarrow W$ .

Es gilt:  $\dim V = \dim \ker T + \text{rang } T$ .

## Beweis

Sei  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  eine Basis für  $N = \ker T$ . Sei  $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in V$ , so dass  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$  eine Basis für  $V$  ist.

**Behauptung:**  $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$  bilden eine Basis für  $R_T$ .

**Beweis:** Aus Bemerkung 18.1 folgt:  $\underbrace{\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)\}}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$  erzeugen  $R_T$ .

Also  $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$  erzeugen  $R_T$ . Sei nun  $\sum_{i=k+1}^n c_i T(\alpha_i) = 0$ .

$$\text{Also } T\left(\underbrace{\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i}_{:=\alpha}\right) = 0.$$

Also  $\alpha \in N$ ; es existiert  $b_1, \dots, b_k \in K$  mit  $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i$ .

$$\text{Also } 0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0.$$

Aber  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$  sind linear unabhängig also

$$b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0. \quad \square$$

## Beispiel 18.3.

$A$  ist eine  $m \times n$ -Matrix.  $T_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$

$$T_A(X) := AX$$

$\ker T_A = \text{Lösungsraum } AX = 0$ .

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m \times 1}; \exists X : AX = Y\} \quad (*)$$

Seien  $A_1, \dots, A_n$  Spalten von  $A$ . Dann ergibt (\*):  $Y \in R_{T_A}$  genau dann, wenn existiert  $X$ , so dass  $Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$ .

Also  $R_{T_A} = \text{Spaltenraum von } A$  und  $\text{rang}(T_A) = \text{Spaltenrang von } A$ , wobei Spaltenraum  $:= \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$ ; Spaltenrang  $:= \dim$  Spaltenraum.

### Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien  $V, W$  Vektorräume über  $K$ . Wir haben gesehen, dass  $\text{Fkt}(V, W) = \{f \mid f : V \rightarrow W \text{ eine Funktion}\}$  versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein  $K$ -Vektorraum ist.

#### Satz 18.4.

Setze  $L(V, W) := \{T \mid T : V \rightarrow W \text{ lineare Transformation}\} := L$  mit Addition

$(T + U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$  für alle  $T$  und  $U \in L$

$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \quad d \in K$ .

Es gilt:  $T + U \in L$  und  $dT \in L$ .

#### Beweis

$(T + U)(c\alpha + \beta) = c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta)$  (Übungsaufgabe)

$(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$

$= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$ . □

#### Bemerkung 18.5.

$0 \in L(V, W)$ ;  $L(V, W) \neq \emptyset$ . Also  $L(V, W) \subseteq \text{Fkt}(V, W)$  (Unterraum). Insbesondere ist  $L(V, W)$  ein  $K$ -Vektorraum.

#### Satz 18.6.

$V$   $n$ -dim,  $W$   $m$ -dim über  $K$ . Dann ist  $\dim L(V, W) = mn$ .

#### Beweis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ist eine geordnete Basis von  $V$  und  $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  ist eine geordnete Basis von  $W$ . Für jedes  $(p, q)$  mit  $1 \leq p \leq m$  und  $1 \leq q \leq n$  definieren wir  $E^{p,q}$  eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \rightarrow W$  definiert für  $j = 1, \dots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq} \beta_p$$

#### Behauptung

$\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq n\}$  bilden eine Basis für  $L$ .

#### Beweis

Sei  $T : V \rightarrow W$  und  $1 \leq j \leq n$ . Schreibe  $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p$  in  $\mathcal{B}'$  für geeignete  $A_{pj} \in K$ .

**Zwischenbehauptung:**  $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:=U},$

$$\begin{aligned} \text{weil } U(\alpha_j) &= (\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q})(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T(\alpha_j) \end{aligned}$$

Also  $U(\alpha) = T(\alpha)$  für alle  $\alpha \in V$ . Also  $U = T$ .

Also  $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$  erzeugen  $L$ .  
Linear unabhängig ?

Sei  $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$  für  $A_{pq} \in K$ . Also gilt für alle  $j = 1, \dots, n$ :  
 $U(\alpha_j) = 0$  i.e.  $\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0$ . Nun ist  $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$  linear  
unabhängig  $\Rightarrow A_{pj} = 0$  für alle  $p$  und  $j$ . □

### Satz 18.7.

Seien  $V, W, Z$  Vektorräume über  $K$  und  $T, U$  lineare Transformationen.

$$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z.$$

Es gilt  $V \xrightarrow{U \circ T} Z$  ist wieder linear.

### Beweis

$$(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta) \quad \square$$

### Sonderfall

$V = W = Z$ . Also hat  $L(V, V)$  eine Vektorenmultiplikation  $UT := U \circ T$ .

### Bezeichnung

Schreibe  $T^0 := I$  (Identitätsabbildung)

$$T^2 := T \circ T$$

$$T^n := T \circ \dots \circ T$$

**Definition 18.8.**

Sei  $K$  ein Körper. Eine *lineare Algebra*  $L$  über  $K$  ist ein  $K$ -Vektorraum, versehen mit einer Vektorenmultiplikation, so dass

$$(a) \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(b) \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ und } (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(c) \quad c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) \text{ für alle } c \in K.$$

(d) Falls ein  $I \in L$  existiert mit  $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$  für alle  $\alpha \in L$ , heißt  $L$  eine lineare Algebra mit Einheit.

(e) Falls  $\alpha\beta = \beta\alpha$  für alle  $\alpha, \beta \in L$  heißt  $L$  kommutativ.

**Lemma 18.9.**

$L(V, V)$  ist eine  $K$ -lineare Algebra mit Einheit.

**Beweis**

(a) Ergibt sich.

$$(b) \quad \begin{aligned} U(T_1 + T_2)(\alpha) &= U((T_1 + T_2)(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha)) \\ &= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Auch } ((T_1 + T_2)U)(\alpha) &= (T_1 + T_2)(U(\alpha)) = T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) \\ &= (T_1U + T_2U)(\alpha). \end{aligned}$$

(c) Analog. □