

18 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Bemerkung 18.1.

V endlich dim; $T : V \rightarrow W$ eine lineare Transformation.

Es gilt: $R_T = T(V) \subseteq W$ (Unterraum) ist endlich erzeugt, weil:

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\alpha \in V$. Setze $\beta_i := T(\alpha_i)$.

$$T(\alpha) = T\left(\sum c_i \alpha_i\right) = \sum c_i T(\alpha_i) = \sum c_i \beta_i.$$

$\Rightarrow T(\alpha) \in \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. Also $R_T = \text{span} \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. □

Satz 18.2.

V endlich dim; $T : V \rightarrow W$.

Es gilt: $\dim V = \dim \ker T + \text{rang } T$.

Beweis

Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N = \ker T$. Sei $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in V$, so dass $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.

Behauptung: $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis für R_T .

Beweis: Aus Bemerkung 18.1 folgt: $\underbrace{\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)\}}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)$ erzeugen R_T .

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T . Sei nun $\sum_{i=k+1}^n c_i T(\alpha_i) = 0$.

$$\text{Also } T\left(\underbrace{\sum_{i=k+1}^n c_i \alpha_i}_{:=\alpha}\right) = 0.$$

Also $\alpha \in N$; es existiert $b_1, \dots, b_k \in K$ mit $\alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i$.

$$\text{Also } 0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^k b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^n c_j \alpha_j = 0.$$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ sind linear unabhängig also

$$b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0. \quad \square$$

Beispiel 18.3.

A ist eine $m \times n$ -Matrix. $T_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$

$$T_A(X) := AX$$

$\ker T_A = \text{Lösungsraum } AX = 0$.

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m \times 1}; \exists X : AX = Y\} \quad (*)$$

Seien A_1, \dots, A_n Spalten von A . Dann ergibt (*): $Y \in R_{T_A}$ genau dann, wenn existiert X , so dass $Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$.

Also $R_{T_A} = \text{Spaltenraum von } A$ und $\text{rang}(T_A) = \text{Spaltenrang von } A$, wobei Spaltenraum $:= \text{span} \{A_1, \dots, A_n\}$; Spaltenrang $:= \dim$ Spaltenraum.

Kapitel 3: § 3 Die Algebra der linearen Transformation

Seien V, W Vektorräume über K . Wir haben gesehen, dass $\text{Fkt}(V, W) = \{f \mid f : V \rightarrow W \text{ eine Funktion}\}$ versehen mit Funktion Addition und Skalarmultiplikation ein K -Vektorraum ist.

Satz 18.4.

Setze $L(V, W) := \{T \mid T : V \rightarrow W \text{ lineare Transformation}\} := L$ mit Addition

$(T + U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha)$ für alle T und $U \in L$

$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \quad d \in K$.

Es gilt: $T + U \in L$ und $dT \in L$.

Beweis

$(T + U)(c\alpha + \beta) = c(T + U)(\alpha) + (T + U)(\beta)$ (Übungsaufgabe)

$(dT)(c\alpha + \beta) = dT(c\alpha + \beta) = d(cT(\alpha) + T(\beta)) = cdT(\alpha) + dT(\beta)$

$= c(dT(\alpha)) + (dT)(\beta)$. □

Bemerkung 18.5.

$0 \in L(V, W)$; $L(V, W) \neq \emptyset$. Also $L(V, W) \subseteq \text{Fkt}(V, W)$ (Unterraum). Insbesondere ist $L(V, W)$ ein K -Vektorraum.

Satz 18.6.

V n -dim, W m -dim über K . Dann ist $\dim L(V, W) = mn$.

Beweis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis von V und $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ ist eine geordnete Basis von W . Für jedes (p, q) mit $1 \leq p \leq m$ und $1 \leq q \leq n$ definieren wir $E^{p,q}$ eine lineare Transformation:

$E^{p,q} : V \rightarrow W$ definiert für $j = 1, \dots, n$

$$E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq} \beta_p$$

Behauptung

$\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq n\}$ bilden eine Basis für L .

Beweis

Sei $T : V \rightarrow W$ und $1 \leq j \leq n$. Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p$ in \mathcal{B}' für geeignete $A_{pj} \in K$.

Zwischenbehauptung: $T = \underbrace{\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:=U},$

$$\begin{aligned} \text{weil } U(\alpha_j) &= (\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q})(\alpha_j) \\ &= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p \\ &= \sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p \\ &= T(\alpha_j) \end{aligned}$$

Also $U(\alpha) = T(\alpha)$ für alle $\alpha \in V$. Also $U = T$.

Also $\{E^{p,q} : 1 \leq p \leq m \text{ und } 1 \leq q \leq m\}$ erzeugen L .
Linear unabhängig ?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$ für $A_{pq} \in K$. Also gilt für alle $j = 1, \dots, n$:
 $U(\alpha_j) = 0$ i.e. $\sum_{p=1}^m A_{pj} \beta_p = 0$. Nun ist $\{\beta_p : 1 \leq p \leq m\}$ linear
unabhängig $\Rightarrow A_{pj} = 0$ für alle p und j . □

Satz 18.7.

Seien V, W, Z Vektorräume über K und T, U lineare Transformationen.

$$V \xrightarrow{T} W \quad W \xrightarrow{U} Z.$$

Es gilt $V \xrightarrow{U \circ T} Z$ ist wieder linear.

Beweis

$$(U \circ T)(c\alpha + \beta) = U(T(c\alpha + \beta)) = U(cT(\alpha) + T(\beta)) = cU(T(\alpha)) + U(T(\beta)) = c(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta) \quad \square$$

Sonderfall

$V = W = Z$. Also hat $L(V, V)$ eine Vektorenmultiplikation $UT := U \circ T$.

Bezeichnung

Schreibe $T^0 := I$ (Identitätsabbildung)

$$T^2 := T \circ T$$

$$T^n := T \circ \dots \circ T$$

Definition 18.8.

Sei K ein Körper. Eine *lineare Algebra* L über K ist ein K -Vektorraum, versehen mit einer Vektorenmultiplikation, so dass

$$(a) \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(b) \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \text{ und } (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma \in L$$

$$(c) \quad c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta) \text{ für alle } c \in K.$$

(d) Falls ein $I \in L$ existiert mit $I \cdot \alpha = \alpha \cdot I = \alpha$ für alle $\alpha \in L$, heißt L eine lineare Algebra mit Einheit.

(e) Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ für alle $\alpha, \beta \in L$ heißt L kommutativ.

Lemma 18.9.

$L(V, V)$ ist eine K -lineare Algebra mit Einheit.

Beweis

(a) Ergibt sich.

$$(b) \quad \begin{aligned} U(T_1 + T_2)(\alpha) &= U((T_1 + T_2)(\alpha)) = U(T_1(\alpha) + T_2(\alpha)) \\ &= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Auch } ((T_1 + T_2)U)(\alpha) &= (T_1 + T_2)(U(\alpha)) = T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) \\ &= (T_1U + T_2U)(\alpha). \end{aligned}$$

(c) Analog. □