19 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Definition 19.1.
Sei $T : V \to W$ eine Abbildung. T ist invertierbar, wenn es eine Abbildung U gibt mit $U : W \to V$ und $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$, wobei Id die Identitätsabbildung bezeichnet: $Id(x) = x$ für alle x.

Lemma 19.2.
T ist invertierbar $\Leftrightarrow$ T ist bijektiv.

Beweis
"$\Rightarrow$"

(1) $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) = U(T(x_1)) = U(T(x_2))$
$= (U \circ T)(x_2) = x_2$, also ist T injektiv.

(2) $(T \circ U)(y) = y$, also $y = T(U(y))$ für alle $y \in W$, also ist T surjektiv.

"$\Leftarrow$"
T bijektiv $\Leftrightarrow$ für alle $y \in W$ existiert genau ein $x \in V$ mit $T(x) = y$. Setze $U(y) := x$. Also wird $U : W \to V$ eindeutig definiert durch $U(y) = x \Leftrightarrow T(x) = y$.

Berechne $U(T(x)) =?$. Setze $y := T(x)$. Also $U(T(x)) = x$.
Analog $T(U(y)) = y$. Also $U \circ T = Id_V$ und $T \circ U = Id_W$. $\square$

Bezeichnung 19.3.
T ist invertierbar $\Rightarrow$ U ist eindeutig definiert. Schreibe $U := T^{-1}$. Also $T^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = T(x)$.

Satz 19.4.
T ist linear und invertierbar $\Rightarrow$ T^{-1} ist linear und invertierbar.

Beweis
$T^{-1}\underbrace{(c\beta_1 + \beta_2)}_{:=Y} \stackrel{?}{=} \underbrace{cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:=X}$.

$T^{-1}(Y) = X \Leftrightarrow T(X) = Y$. Also berechne $T(X) = T(cT^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2))$
$= cT(T^{-1}(\beta_1)) + T(T^{-1}(\beta_2)) = c\beta_1 + \beta_2$. $\square$

Satz 19.5.
Es seien $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$ invertierbare Abbildungen. Dann ist $L \circ G : V \to Z$ invertierbar und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$.

Beweis
$(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) = G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G = G^{-1} \circ G = I$. Andere: Analog. $\square$

Definition 19.6. und Bezeichnung
$GL_k(V) := \{T \mid T : V \to V$ invertierbare lineare Abbildung$\}$.

Bemerkung 19.7.
Wir haben gerade gezeigt, dass $GL_k(V)$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist. $GL_k(V)$ ist die *allgemeine lineare Gruppe* (general linear group).

Definition 19.8.
T ist *singulär*, falls $\ker(T) \neq \{0\}$ ist. Sonst heißt T *regulär* oder *nicht singulär*. Also bedeutet T regulär: $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Satz 19.9.
$T : V \to W$ ist regulär $\Leftrightarrow$ T bildet eine linear unabhängige Teilmenge von V auf eine linear unabhängige Teilmenge von W.

Beweis
"$\Rightarrow$"
Sei $\ker(T) = \{0\}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ linear unabhängig in V. Zu zeigen: $T(\alpha_1), \ldots, T(\alpha_k)$ linear unabhängig.

Sei $c_1T(\alpha_1) + \cdots + c_kT(\alpha_k) = 0$. Also $T(c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k) = 0$. Also $c_1\alpha_1 + \cdots c_k\alpha_k \in \ker(T)$. Also $c_1\alpha_1 + \cdots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ linear unabhängig $\Rightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$. $\square$

Korollar 19.10.
Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$ und $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Es gilt T ist injektiv $\Leftrightarrow$ T ist surjektiv.

Beweis
Wir wenden den Dimensionssatz (Satz 18.2) an.
$d = \operatorname{rang}(T) + \dim\ker(T)$. Also T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Leftrightarrow$
$\dim\ker(T) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang}(T) = d \Leftrightarrow \dim R_T = d \Leftrightarrow R_T = W \Leftrightarrow T$ surjektiv. $\square$