

24 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beobachtung

Beziehung zu homogenen Gleichungssystemen

$$\text{Sei } \left\{ \begin{array}{l} A_{11}x_1 + \cdots + A_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ A_{m1}x_1 + \cdots + A_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\} \text{ homogenes Gleichungssystem} \quad (*)$$

mit Koeffizienten in Körper K

Definiere für $i = 1, \dots, m$ ein Funktional auf K^n :

$$f_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j.$$

Es gilt: Lösungsraum von $(*) = \bigcap_{i=1}^m \ker(f_i)$ (folgt unmittelbar aus den Definitionen). Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 24.1.

$V = \mathbb{R}^5$; $W = \text{span} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \}$, wobei gilt:

$$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1),$$

$$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2),$$

$$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3) \text{ und}$$

$$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0) \text{ ist.}$$

Finde W^0 .

$$\text{Sei } f \in V^*. \text{ Es gilt allgemein } f(x_1, \dots, x_5) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j.$$

Insbesondere: (homogenes Gleichungssystem in c_1, \dots, c_5)

$$f \in S^0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^5 A_{ij}c_j = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 4$$

wobei A_{ij} die Koeffizienten der Koeffizientenmatrix A des (HGS) i.e.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ (GEV)} \Rightarrow \text{r. Z. S. F. :}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5$

c_1, c_3, c_5 sind Hauptvariablen und c_2 und c_4 sind freie Variablen.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für $\sum_{j=1}^5 R_{ij}c_j = 0$ für alle $1 \leq i \leq 3$ i.e.

$$\begin{array}{rcccc} c_1 & - & c_2 & - & c_4 & = & 0 \\ & & c_3 & + & 2c_4 & = & 0 \\ & & & & c_5 & = & 0 \end{array}$$

Setze $c_2 = a$ und $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$, dann sind

$c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$ und $c_5 = 0$ und

$W^0 = \{f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Es gilt $\dim W^0 = 2$.

Eine Basis für W^0 erhält man z.B. durch einsetzen von

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \quad b = 0 \\ a = 0 \quad b = 1 \end{array} \right\} \text{ und } \left. \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{array} \right\} \text{ ist eine Basis für } W^0$$

□

Kapitel 3: § 6 Bi-Dual

Sei V ein endlich dim Vektorraum über K .

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

$$(1) \quad V \longrightarrow V^* \\ \mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$$

Umkehrung? Sei \mathbb{B} eine Basis für V^* . Existiert eine Basis \mathcal{B} für V , so dass $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

$$(2) \quad V \longrightarrow V^* \\ W \longmapsto W^0$$

Umkehrung? Sei U ein Unterraum von V^* . Existiert ein Unterraum W von V , so dass $U = W^0$?

Schlüssel

Wir betrachten $(V^*)^* = V^{**}$.

Bemerkung 24.2.

$\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Definition 24.3. und Terminologie

Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt der *Bi-Dualraum* zu V .

Proposition 24.4.

Sei $\alpha \in V$. α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in V^*.$$

Beweis

$$L_\alpha(cf + g) = (cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g) \quad \square$$

Satz 24.5.

Die Abbildung $\lambda : V \longrightarrow V^{**}$
 $\alpha \longmapsto L_\alpha$

ist ein Isomorphismus.

Beweis

$$\lambda(c\alpha + \beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) ?$$

Zu zeigen ist also $[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f)$ für alle $f \in V^*$.

Wir berechnen:

$$[\lambda(c\alpha + \beta)](f) = L_{c\alpha + \beta}(f) = f(c\alpha + \beta) = cf(\alpha) + f(\beta) = cL_\alpha(f) + L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) = [c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)](f).$$

Also ist λ linear. Wir zeigen, dass λ bijektiv ist. Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$ zu beweisen: λ ist regulär.

Sei $\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\alpha) = 0 \\ \text{i.e. } L_\alpha = 0 \end{array} \right\}$ zu zeigen $\alpha = 0$.

Zum Widerspruch $\alpha \neq 0$, also ist $\{\alpha\}$ linear unabhängig.

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V und $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ die Dualbasis. Es gilt $f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$. Also $L_\alpha(f_1) \neq 0$. Also $L_\alpha \neq 0$, ein Widerspruch. \square