6 Script zur Vorlesung: Lineare Algebra I

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Beispiel 6.1.

(i) Die Identitätsmatrix oder Einheitsmatrix (quadratische Matrix) I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

I_n ist in r.Z.F.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind **nicht** in r.Z.F.

(iii) Die $0^{m\times n}$-Matrix ($0_{ij} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$) ist in r.Z.F.

Definition 6.2.
Eine $m \times n$-Matrix A ist in einer *(reduzierten) Zeilenstufenform* (r.Z.S.F.), falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(a) Axiome für r.Z.F. und

(b) Axiome für r.Z.F. und

(c) jede identische Nullzeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht identischen Nullzeile.

(d) Seien $Z_1, \ldots, Z_r$ die nicht identischen Nullzeilen ($r \leq m$) und k_i der Spaltenindex, in der die Haupteins der i-ten Zeile erscheint ($i = 1, \ldots, r$), dann gilt $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Satz 6.3.
Jede $m \times n$-Matrix A ist zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r.Z.S.F.

Beweis siehe unten

Zweck: Aus der r.Z.S.F. kann man $L(S)$ sofort ablesen.

Beispiel 6.4.
Über $\mathbb{Q}$: Erweiterte Koeff-M:

(i)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{ccccc} x_1 & & & = & 4 \\ & x_2 & & = & 7 \\ & & x_3 & = & -1 \end{array}$$

(ii)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \leftarrow \text{inkonsistent.}$$

(iii)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

x_1, x_2, x_3 Hauptvariablen; x_4 freie Variable.

$$\begin{array}{ccccccc|ccccccc} x_1 & & & + & 4x_4 & = & -1 & & x_1 & = & -1 & - & 4x_4 \\ & x_2 & & + & 2x_4 & = & 6 & \Rightarrow & x_2 & = & 6 & - & 2x_4 \\ & & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 & & x_3 & = & 2 & - & 3x_4 \end{array}$$

$x_4 = q \in \mathbb{Q}$ also $L(S) = \{(-1-4q, 6-2q, 2-3q, q) \in \mathbb{Q}^4; q \in \mathbb{Q}\}$

Beweis von Satz 6.3:
Falls $A = 0^{m\times n}$, dann ist A bereits in r.Z.S.F. Ansonsten:

Typ 1 und Bei wiederholter Anwendung von Typ 1 können wir Œ annehmen, dass die Zeilen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_r$ nicht Null sind ($r \leq m$) $Z_{r+1}, \ldots, Z_m$ Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!).
Wir betrachten Z_1:
Sei $0 \neq a_{1k_1}$ Hauptkoeffizient ($1 \leq k_1 \leq n$)

Typ 2 Multipliziere Z_1, durch $a_{1k_1}^{-1}$ und dann für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ 3 Addiere $(-a_{ik_1})$-fach von (der neu erhaltenen Zeile) Z_1 zur i-ten Zeile

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{Spalte } k_1 \\ \downarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} z_1 \\ \\ \\ \\ \\ z_r \\ \\ \\ \\ \end{array} & \left(\begin{array}{cccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ & & & \vdots & & & & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & 0 & \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \end{array}\right) := A_1 \end{array}$$

Nun betrachte Z_2 der Matrix A_1. Wieder

Typ 1 Œ$Z_2 \not\equiv 0$.

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von Z_2. Bemerke: $k_2 \neq k_1$! Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2k_2} & \cdots & 0 & * & \cdots & \cdots & * \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & \vdots & & & & \\ & & & & & 0 & & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 1) } (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots & & a_{2k_2} & \cdots & * \\ & & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \text{ (Fall 2) } (k_1 < k_2)$$

Typ 2 Wiederhole: Multipliziere Z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$, dann

Typ 3 Im Fall 1 ($k_2 < k_1$): Addiere $(-a_{ik_2})$-fach von Z_2 zur i-ten Zeile für $3 \leq i \leq m$.

Typ 3 Im Fall 2 ($k_1 < k_2$): Addiere $(-a_{ik_2})$-fach von Z_2 zur i-ten Zeile für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$. □

Achtung
Wichtig ist es zu bemerken, dass wir die Koeffizienten
$a_{1j} = 0 \quad j = 1, \ldots, k_1 - 1$ und
$a_{1k_1} = 1$ und
$a_{ik_1} = 0 \quad i = 2, \ldots, m$ von A_1 in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$ nicht geändert haben !

Per Induktion wiederholen wir diese Prozedur für $i = 3, \ldots, r$. Wir erhalten eine Matrix A_r, die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich erhalten wir bei wiederholter Anwendung von Typ 1 eine Matrix B, die auch (d) genügt, also B ist in r.z.S.F.

Kapitel 1: § 4 Homogene Systeme

Beispiel 6.5.
Sei R folgende Matrix (über $\mathbb{Q}$)

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

finde $L(S)$, wobei (S) das homogene System $R\underline{X} = \underline{0}$ ist.

Lösung
R ist in r.Z.S.F. Beobachte: $r :=$ Anzahl der $\not\equiv 0$-Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariable.

$$(S) \quad \begin{array}{rcl} x_2 - 3x_3 \qquad + \frac{1}{2}x_5 & = & 0 \\ x_4 + 2x_5 & = & 0 \end{array}$$

Also $\quad x_2 = 3x_3 - \frac{1}{2}x_5$
$\quad x_4 = \qquad -2x_5$
$\quad x_1, x_3, x_5$ freie Variable. Setze $x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c$.

Also $\quad L(S) = \{(a, 3b - \frac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5; a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

Bemerke
x_1 freie Variable. Setze $a = 1, b = c = 0$. dann ist $(1, 0, 0, 0, 0)$ eine nicht-triviale Lösung.