Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
WS 2010/11

Basiswissen Topologie

zur Vorlesung

Algorithmische algebraische Geometrie

Dies ist eine Zusammenstellung von einigen wenigen grundlegenden Definitionen, Notationen und Resultaten aus der mengentheoretischen Topologie, soweit sie in der Vorlesung Algebraische Geometrie verwendet werden. Um mehr zu lernen, kann man die Topologie-Vorlesung von Annalisa Conversano hören, oder in ein geeignetes Buch schauen, z.B.

- H. Schubert: *Topologie.* Teubner, Stuttgart, 1975.
- J.R. Munkres: *Topology. A First Course.* Prentice Hall, N.J., 1975.
- J.L. Kelley: *General Topology.* Van Nostrand, New York, 1955.

1. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, deren Mitglieder die *offenen Mengen* genannt werden, derart daß gelten:

(1) X und $\varnothing$ sind offen;
(2) jede Vereinigung offener Mengen ist offen;
(3) jeder Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $X \smallsetminus Y$ offen ist. Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$ aus einer Menge X und einer Topologie $\mathcal{O}$ auf X. In der Regel läßt man $\mathcal{O}$ in der Notation weg.

2. Sei X ein topologischer Raum, und sei $\mathcal{U}$ eine Menge offener Teilmengen von X. Man nennt $\mathcal{U}$ eine *Basis* der Topologie von X, wenn jede offene Teilmenge von X Vereinigung von Mitgliedern von $\mathcal{U}$ ist. Man nennt $\mathcal{U}$ eine *Subbasis* der Topologie von X, wenn die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mitgliedern von $\mathcal{U}$ eine Basis der Topologie von X ist.

3. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Der *Abschluß* $\overline{Y}$ von Y ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Obermengen von Y in X, und ist damit die kleinste abgeschlossene Obermenge von Y in X. Das *Innere* $\operatorname{int}(Y)$ von Y ist die Vereinigung aller in Y enthaltenen offenen Teilmengen von X, und ist damit die größte in Y enthaltene offene Teilmenge von X. Die Teilmenge Y heißt *dicht* in X, wenn $\overline{Y} = X$ ist.

4. Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Eine Teilmenge U von X heißt eine *offene Umgebung* von x, wenn U offen und $x \in U$ ist. Die Menge U heißt eine *Umgebung* von x, wenn U eine offene Umgebung von x enthält, also wenn $x \in \operatorname{int}(U)$ ist.

5. Der topologische Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn X und $\varnothing$ die einzigen offen-abgeschlossenen Teilmengen von X sind. Zu jedem $x \in X$ ist die Vereinigung aller zusammenhängenden und x enthaltenden Teilmengen von X zusammenhängend, und heißt die *Zusammenhangskomponente* von x. Der Raum X ist die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.

6. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Die *Relativtopologie* (oder *Teilraumtopologie*) von X auf Y hat nach Definition genau die Mengen der Form $Y \cap U$ mit U offen in X als offene Mengen. Ist Z eine Teilmenge von Y, so sagt man, daß Z offen bzw. abgeschlossen in Y ist, wenn Z offen bzw. abgeschlossen in der Relativtopologie auf Y ist.

7. Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *stetig*, wenn für jede offene Teilmenge V von Y das Urbild $f^{-1}(V)$ offen in X ist. Ist f bijektiv, und sind sowohl f als auch f^{-1} stetig, so heißt f ein *Homöomorphimus.*

8. Ein topologischer Raum X heißt ein *Hausdorffraum*, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x \neq x'$ von X Umgebungen U von x und U' von x' existieren mit $U \cap U' = \varnothing$.

Der Raum X heißt *quasikompakt*, wenn zu jeder Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ von X aus offenen Mengen U_i eine endliche Teilüberdeckung existiert, d.h. eine endliche Teilmenge J von I mit $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Der Raum X heißt *kompakt*, wenn X quasikompakt und Hausdorff ist.

9. Sei X_i $(i \in I)$ eine Familie topologischer Räume. Die *Produkttopologie* auf dem direkten Produkt $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist dadurch definiert, daß sie die Menge alle Quader der Form

$$\prod_{i \in I} U_i$$

mit $U_i \subseteq X_i$ offen und $U_i \neq X_i$ für höchstens endlich viele $i \in I$ als Basis offener Mengen hat.

Der Satz von Tychonov besagt: Ist jeder der Räume X_i quasikompakt, so ist auch das direkte Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ (in der Produkttopologie) quasikompakt. Dieser Satz ist äquivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre, oder auch zum Zornschen Lemma.

10. Sind $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ zwei Topologien auf der Menge X, so nennt man $\mathcal{O}$ *gröber als* $\mathcal{O}'$, oder $\mathcal{O}'$ *feiner als* $\mathcal{O}$, wenn $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$ gilt.