Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 1

Abgabe: Montag, 25. Oktober 2010, in der Vorlesung

Aufgabe 1
Sei K ein unendlicher Körper, sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Ist $f(x) = 0$ für alle $x \in K^n$, so ist f das Nullpolynom.

Aufgabe 2
Sei A ein Ring, seien I, I_1, I_2 Ideale von A.

(a) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
(b) $\sqrt{I_1 \cap I_2} = \sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} \cap \sqrt{I_2}$.
(c) Gilt auch $\sqrt{I_1 I_2} = \sqrt{I_1} \cdot \sqrt{I_2}$?
(d) Ist $\varphi\colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus und J ein Ideal von B, so ist $\sqrt{\varphi^{-1}(J)} = \varphi^{-1}(\sqrt{J})$.
(e) $\mathrm{Nil}(A/I) = \sqrt{I}/I$.
(f) $\sqrt{IA_S} = \sqrt{I} \cdot A_S$ für jede multiplikative Teilmenge S von A.

Aufgabe 3
Sei k ein Körper mit algebraischem Abschluß $\overline{k}$.

(a) Für jeden Punkt $a \in \overline{k}^n$ ist
$$\mathfrak{m}_a \;:=\; \mathcal{I}(\{a\}) \;=\; \{f \in k[\mathtt{x}]\colon f(a) = 0\}$$
ein maximales Ideal von $k[\mathtt{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$.
(b) Für jede endlich erzeugte k-Algebra A und jedes Ideal I von A ist $\sqrt{I}$ ein Durchschnitt von maximalen Idealen von A.

Aufgabe 4
Sei A ein Ring. Ein *minimales Primideal* von A ist ein Primideal $\mathfrak{p}$ von A derart, daß es kein echt in $\mathfrak{p}$ enthaltenes anderes Primideal von A gibt.

(a) Jedes Primideal von A enthält ein minimales Primideal.
(b) Jedes minimale Primideal $\mathfrak{p}$ von A besteht aus Nullteilern von A.
(c) Ist der Ring A reduziert, so ist die Menge der Nullteiler von A gleich der Vereinigung aller minimalen Primideale von A.

Hinweise: (a) Zornsches Lemma; (b) betrachte den lokalen Ring $A_{\mathfrak{p}}$ und sein Nilradikal.