Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

# Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

## Blatt 10

**Abgabe:** Mittwoch 12. Januar 2011, in der Vorlesung

Sei stets $k$ ein Körper und $K$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von $k$.

### Aufgabe 37

Sei $V$ eine quasiprojektive Varietät. Für je zwei offen-affine Teilmengen $U_1$, $U_2$ von $V$ ist auch der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ affin. (*Anleitung:* Sei $\Delta \subseteq V \times V$ die Diagonale von $V$. Zeige zunächst, daß die offene Untervarietät $\Delta \cap (U_1 \times U_2)$ von $\Delta$ affin ist.)

### Aufgabe 38

Man zeige, daß die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ genau die Nullstellenmengen von Systemen aus bihomogenen Polynomen in $k[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ sind. Hier ist $\mathtt{x} = (x_0, \dots, x_m)$, $\mathtt{y} = (y_0, \dots, y_n)$, und $f(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ heißt bihomogen vom Bigrad $(d, e)$, wenn in $f$ nur Monome $\mathtt{x}^\alpha \mathtt{y}^\beta$ mit $|\alpha| = d$ und $|\beta| = e$ vorkommen.

### Aufgabe 39

Seien drei paarweise disjunkte Geraden $L_1$, $L_2$, $L_3$ im $\mathbb{P}^3$ gegeben. Die Vereinigung aller Geraden im $\mathbb{P}^3$, welche alle drei Geraden schneiden, ist projektiv äquivalent zur Segrevarietät $S_{1,1}$.

*Anleitung:* Man zeige zunächst: Auf $\mathbb{P}^3$ gibt es lineare Koordinaten derart, daß $L_1 = \mathcal{V}_+(x_0, x_1)$, $L_2 = \mathcal{V}_+(x_2, x_3)$ und $L_3 = \mathcal{V}_+(x_0 - x_2, x_1 - x_3)$ ist.

### Aufgabe 40

Wir versehen $\mathbb{P}^5$ mit den homogenen Koordinaten $(z_{ij})_{0 \le i < j \le 3}$.

(a) Sei $L$ eine Gerade im $\mathbb{P}^3$, seien $p = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ und $q = (y_0 : y_1 : y_2 : y_3)$ Punkte auf $L$ mit $p \neq q$, und sei $z_{ij} := x_i y_j - x_j y_i$ $(0 \le i < j \le 3)$. Der Punkt $z_L := (z_{ij}) \in \mathbb{P}^5$ hängt nur von $L$, aber nicht von der Wahl von $p$ und $q$ auf $L$ ab.

(b) $z_L$ liegt auf der Quadrik $V := \mathcal{V}_+(z_{01}z_{23} - z_{02}z_{13} + z_{03}z_{12})$ im $\mathbb{P}^5$.

(c) Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $z \in V$ genau eine Gerade $L$ im $\mathbb{P}^3$ mit $z = z_L$. Die Punkte auf der Quadrik $V$ stehen also in Bijektion zu den Geraden im $\mathbb{P}^3$.

*Anleitung zu (c):* Sei $z = (z_{ij})$ mit (etwa) $z_{01} \neq 0$. Ist dann $z = z_L$, so enthält $L$ Punkte der Form $p = (1 : 0 : x_2 : x_3)$ und $q = (0 : 1 : y_2 : y_3)$.