Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 11

Abgabe: Mittwoch 19. Januar 2011, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper.

Aufgabe 41

(a) Sei X ein topologischer Raum, und sei $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ eine Überdeckung von X durch offene Teilmengen. Gilt $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ für alle $i,\ j \in I$, und ist X_i irreduzibel für jedes $i \in I$, so ist auch X irreduzibel.

(b) Benutze (a), um für jede irreduzible k-Varietät V und alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, daß auch die k-Varietät $V \times \mathbb{P}^n$ irreduzibel ist.

Aufgabe 42

Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f_n,\ f_{n-1} \in k[x,y]$ zwei teilerfremde homogene Polynome mit $\deg(f_i) = i$ für $i \in \{n-1,\ n\}$. Es sei $C = \mathcal{V}(f_n - f_{n-1}) \subseteq \mathbb{A}^2$.

(a) C ist irreduzibel.

(b) Durch $\phi(x,y) = \frac{y}{x}$ wird eine rationale Abbildung $\phi\colon C \dashrightarrow \mathbb{A}^1$ definiert.

(c) ϕ ist eine k-birationale Äquivalenz.

Aufgabe 43

Betrachte die (irreduzible) kubische Fläche $X = \mathcal{V}_+(x_0^2x_1 - x_2^2x_3) \subseteq \mathbb{P}^3$. Zeige, daß durch $f(x) = (x_0^2 : x_2x_3 : x_0x_3)$ eine birationale Äquivalenz $f\colon X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ gegeben ist, und bestimme die zu f inverse rationale Abbildung.

Aufgabe 44

Projiziere die rationale Normalenkurve

$$C = v_3(\mathbb{P}^1) = \{(s^3 : s^2t : st^2 : t^3)\colon\ (s:t) \in \mathbb{P}^1\}$$

im $\mathbb{P}^3$ vom Zentrum

(a) $p = (0:1:0:0)$

(b) $p = (1:0:0:1)$

auf $\mathbb{P}^2$ und finde Gleichungen für die Bildkurve.