Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 13

Abgabe: Mittwoch 2. Februar 2011, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper.

Aufgabe 49

Sei X ein topologischer Raum.

(a) Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist $\dim(Y) \leq \dim(X)$.

(b) Ist $X = X_1 \cup \cdots \cup X_r$, und sind die X_i alle offen oder alle abgeschlossen in X, so ist $\dim(X) = \max_i \dim(X_i)$.

Aufgabe 50

Finde eine Noethersche Normalisierung, d.h. einen endlichen surjektiven Morphismus $V \to \mathbb{A}^d$, für

$$V \;=\; \mathcal{V}(x_1^3 - x_2x_3,\, x_1x_3 - x_2^2,\, x_1^2x_2 - x_3^2) \;\subseteq\; \mathbb{A}^3.$$

Hinweis: Aufgabe 9.

Aufgabe 51

Sei V eine (nichtleere) Hyperfläche in $\mathbb{A}^n$. Fasse $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ auf via $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \cdots : x_n)$, und sei $\overline{V}$ der Abschluß von V in $\mathbb{P}^n$. Sind $c_1, \ldots, c_{n-1} \in k$ mit $(0 : c_1 : \cdots : c_{n-1} : 1) \notin \overline{V}$, so ist

$$\pi\colon V \to \mathbb{A}^{n-1}, \quad \pi(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1 - c_1x_n,\, \ldots,\, x_{n-1} - c_{n-1}x_n\big)$$

ein endlicher surjektiver Morphismus.

Aufgabe 52

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die Varietät $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ mit den Koordinaten

$$(x; y) \;=\; (x_1, \ldots, x_n;\, y_1 : \cdots : y_n)$$

(wobei die zweite Hälfte der Koordinaten homogen ist), und definiere

$$X \;:=\; \mathcal{V}(x_iy_j - x_jy_i\colon\; 1 \leq i < j \leq n),$$

eine abgeschlossene Untervarietät von $\mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$. Sei $\pi\colon X \to \mathbb{A}^n$ definiert durch $\pi(x; y) = x$ für $(x; y) \in X$, und sei $P = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^n$.

(a) Zeige für $i = 1, \ldots, n$, daß $X_i := X \cap (\mathbb{A}^n \times D_+(y_i))$ zu $\mathbb{A}^n$ isomorph ist, und folgere mit Aufgabe 41, daß X irreduzibel ist.

(b) π ist ein surjektiver Morphismus.

(c) Für $E := \pi^{-1}(P)$ gilt $E \cong \mathbb{P}^{n-1}$, und die Restriktion von π auf $X \setminus E$ ist ein Isomorphismus $X \setminus E \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n \setminus \{P\}$ der Varietäten. Insbesondere ist π birational.

Der Morphismus π (oder die Varietät X) heißt die *Aufblasung* von $\mathbb{A}^n$ im Punkt P.