Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 2

Abgabe: Mittwoch, 3. November 2010, in der Vorlesung

Aufgabe 5
Die in Polarkoordinaten (r, θ) durch

$$r = 1 + \cos(\theta)$$

gegebene Kurve in $\mathbb{R}^2$ heißt *Kardioide*. Zeige, daß sie algebraisch ist, und finde ihre Gleichung.

Aufgabe 6
Sei A ein Ring. Für Ideale I, J von A heißt

$$(I : J) := \{a \in A \colon aJ \subseteq I\}$$

der *Idealquotient* I durch J. Man zeige, daß $(I : J)$ ein Ideal von A ist, und dann die folgenden Aussagen:

(a) Ist K ein weiteres Ideal von A, so gilt $((I : J) : K) = (I : JK)$.
(b) Ist I ein Ideal und $f \in A$, so ist $I \cap (f) = (I : f) \cdot (f)$.
(c) Für Ideale $I, I_1, \dots, I_r$ und $J, J_1, \dots, J_s$ ist

$$\Big(\bigcap_i I_i : J\Big) = \bigcap_i (I_i : J), \quad \Big(I : \sum_j J_j\Big) = \bigcap_j (I : J_j).$$

Aufgabe 7
Die Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ ist echt feiner als die Produkttopologie.

Aufgabe 8
Seien M, N A-Moduln. Ein *Tensorprodukt* von M und N (über A) ist ein A-Modul T zusammen mit einer A-bilinearen Abbildung

$$t \colon M \times N \to T,$$

welche die folgende universelle Eigenschaft hat: Für jede A-bilineare Abbildung $b \colon M \times N \to U$ in einen A-Modul U gibt es genau eine A-lineare Abbildung $f \colon T \to U$ mit $b = f \circ t$.

Zeige: Für je zwei A-Moduln M, N existiert ein Tensorprodukt (T, t) von M und N, und ist eindeutig bestimmt bis auf eindeutigen Isomorphismus. Als abelsche Gruppe wird $M \otimes_A N$ von allen $x \otimes y$ ($x \in M$, $y \in N$) erzeugt.

Anleitung: Sei S der freie A-Modul, welcher die Familie aller Paare $[x, y]$ mit $x \in M$ und $y \in N$ als Basis hat. Betrachte den Untermodul R von S, der von allen Elementen

$$[a_1x_1 + a_2x_2,\, b_1y_1 + b_2y_2] - a_1b_1[x_1, y_1] - a_1b_2[x_1, y_2] - a_2b_1[x_2, y_1] - a_2b_2[x_2, y_2]$$

($x_i \in M$, $y_i \in N$, a_i, $b_i \in A$) erzeugt wird. Setze $T := S/R$ und $t(x, y) := [x, y] + R$ für $(x, y) \in M \times N$.

Bemerkung: Man schreibt $M \otimes_A N := T$ und $x \otimes y := t(x, y)$ für $(x, y) \in M \times N$, und nennt $M \otimes_A N$ *das* Tensorprodukt von M und N über A.