Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 3

Abgabe: Mittwoch 10. November 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 9

Im Polynomring $k[x, y, z]$ betrachte die Polynome $p_1 = x^3 - yz$, $p_2 = xz - y^2$ und $p_3 = x^2y - z^2$. Sei $C := \{(t^3, t^4, t^5) \colon t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3$. Zeige, daß C irreduzibel und $C = \mathcal{V}(p_1, p_2, p_3)$ ist, und bestimme die irreduziblen Komponenten von $\mathcal{V}(p_1, p_2)$, $\mathcal{V}(p_1, p_3)$ und $\mathcal{V}(p_2, p_3)$.

Aufgabe 10

In dieser Aufgabe werden alle Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^2$ bestimmt.

(a) Seien f, $g \in k[x, y]$ mit $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Dann ist $\mathcal{V}(f, g) \subseteq \mathbb{A}^2$ eine endliche Menge.

(b) Jede unendliche echte und (bezüglich der k-Zariskitopologie) irreduzible Zariski-abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^2$ hat die Form $\mathcal{V}(f)$ für ein irreduzibles Polynom $f \in k[x, y]$.

Hinweis zu (a): Man zeige zunächst, daß f und g auch als Elemente von $k(x)[y]$ teilerfremd sind, und folgere daraus $I \cap k[x] \neq \{0\}$ für das Ideal $I := (f, g)$ in $k[x, y]$.

Aufgabe 11

(a) Sind I, J monomiale Ideale in $k[\mathtt{x}]$, so sind auch die Ideale $\sqrt{I}$, $I + J$, $I \cap J$, IJ und $(I : J)$ monomial.

(b) Sei I ein monomiales Ideal in $k[\mathtt{x}]$, erzeugt von $\mathtt{x}^{\alpha_1}, \ldots, \mathtt{x}^{\alpha_r}$, und sei $\mathtt{x}^\beta$ ein weiteres Monom. Dann ist
$$(I : \mathtt{x}^\beta) \;=\; \Big(\frac{\mathtt{x}^{\alpha_1}}{\mathrm{ggT}(\mathtt{x}^{\alpha_1}, \mathtt{x}^\beta)}, \;\ldots,\; \frac{\mathtt{x}^{\alpha_r}}{\mathrm{ggT}(\mathtt{x}^{\alpha_r}, \mathtt{x}^\beta)}\Big).$$

Aufgabe 12

Sei A ein Ring und seien M, M_i, N, N_λ A-Moduln. Bekanntlich heißt eine Sequenz $\cdots \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to \cdots$ aus A-Moduln und A-linearen Abbildungen exakt an der Stelle M_2, wenn $\ker(g) = \mathrm{im}(f)$ ist. Die Sequenz heißt exakt (schlechthin), wenn sie an jeder Stelle exakt ist.

(a) Man konstruiere Isomorphismen von A-Moduln wie folgt:
$$A \otimes_A M \;\cong\; M,$$
$$M \otimes_A N \;\cong\; N \otimes_A M,$$
$$(M_1 \otimes_A M_2) \otimes_A M_3 \;\cong\; M_1 \otimes_A (M_2 \otimes_A M_3),$$
$$M \otimes_A \Big(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda\Big) \;\cong\; \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M \otimes_A N_\lambda.$$

(b) Sind $f\colon M \to M'$, $g\colon N \to N'$ A-lineare Abbildungen, so gibt es genau eine A-lineare Abbildung $M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ mit $x \otimes y \mapsto f(x) \otimes g(y)$. Sie wird mit $f \otimes g$ bezeichnet.

(c) Ist $M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, und ist N ein weiterer A-Modul, so ist auch die Sequenz

$$M' \otimes_A N \xrightarrow{f' \otimes \mathrm{id}} M \otimes_A N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_A N \longrightarrow 0$$

exakt ("Rechtsexaktheit des Tensorprodukts").

(d) Ist der A-Modul N frei, so ist für jede exakte Sequenz von A-Moduln auch die mit N tensorierte Sequenz exakt. (Benutze (a).)

Anleitung zu (c): Um $\ker(f \otimes \mathrm{id}) \subseteq \mathrm{im}(f' \otimes \mathrm{id})$ zu zeigen, konstruiere man eine geeignete Abbildung von $M'' \otimes N$ nach $\mathrm{coker}(f' \otimes \mathrm{id}) = (M \otimes N)/\mathrm{im}(f' \otimes \mathrm{id})$.