Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 4

Abgabe: Mittwoch 17. November 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 13

Sei $I = (x^2-y, x^3-z) \subseteq k[x,y,z]$. Welche Gröbnerbasis von I gibt der Buchberger-Algorithmus bezüglich (a) *invlex*, (b) *lex*, (c) *grevlex*? Welches ist jeweils die reduzierte Gröbnerbasis von I?

Aufgabe 14

Sei $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_n)$, und seien $f_1, \dots, f_r \in k(\mathtt{x}) = k(x_1, \dots, x_n)$ rationale Funktionen. Wir schreiben $f_i = g_i/h$ mit g_i, $h \in k[\mathtt{x}]$ und $h \neq 0$. Dann ist die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{A}^n \smallsetminus \mathcal{V}(h) \to \mathbb{A}^r, \ \ \phi(x) := \bigl(f_1(x), \dots, f_r(x)\bigr)$$

wohldefiniert. Sei V der Abschluß von $\mathrm{im}(\phi)$ in der k-Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^r$. Man zeige, daß $k[V]$ zur k-Teilalgebra $k[f_1, \dots, f_r]$ von $k(\mathtt{x})$ isomorph ist, und folgere: V ist k-irreduzibel.

Aufgabe 15

Für das Verschwindungsideal $\mathcal{I}(C)$ der affinen Varietät $C = \{(t^3, t^4, t^5)\colon t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^3$ (Aufgabe 9) zeige man:

(a) $\mathcal{I}(C) = (x^3 - yz,\ xz - y^2,\ x^2y - z^2)$;
(b) $\mathcal{I}(C)$ kann nicht von zwei Elementen erzeugt werden.

Anleitung zu (a): Reduziere ein gegebenes Element aus $\mathcal{I}(C)$ schrittweise modulo dem rechten Ideal, bis es eine hinreichend einfache Form hat. Zu (b): Setze $\mathfrak{m} := (x,y,z)$ und $I := \mathcal{I}(C)$, dann gilt $I \subseteq \mathfrak{m}^2$. Welche Dimension hat der k-Vektorraum $I/(I \cap \mathfrak{m}^3)$?

Aufgabe 16

Ist M ein A-Modul und S eine multiplikative Teilmenge von A, so wird auf $M \times S$ durch

$$(x,s) \sim (y,t) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, u \in S \ \ u(tx - sy) = 0$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Wir bezeichnen mit $\frac{x}{s}$ die Äquivalenzklasse von (x,s), und mit M_S die Menge aller Äquivalenzklassen. Man überzeuge sich davon, daß auf M_S durch

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} \ := \ \frac{tx+sy}{st}, \quad \frac{a}{t} \cdot \frac{x}{s} \ := \ \frac{ax}{st}$$

(für $\frac{x}{s}$, $\frac{y}{t} \in M_S$ und $\frac{a}{t} \in A_S$) eine wohldefinierte Struktur als A_S-Modul gegeben ist, und zeige:

(a) Jede A-lineare Abbildung $f\colon M \to N$ induziert eine A_S-lineare Abbildung $f_S\colon M_S \to N_S$ durch $f_S(\frac{x}{s}) = \frac{f(x)}{s}$. Ist $g\colon N \to N'$ eine weitere A-lineare Abbildung, so ist $(g \circ f)_S = g_S \circ f_S$.

(b) Ist $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ eine exakte Sequenz aus A-linearen Abbildungen, so ist die induzierte Sequenz $M'_S \xrightarrow{f_S} M_S \xrightarrow{g_S} M''_S$ der A_S-Moduln ebenfalls exakt.