Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 5

Abgabe: Mittwoch 24. November 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 17

Sei I ein Ideal in $k[\mathtt{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$, und sei $\preceq$ eine Monomordnung auf $k[\mathtt{x}]$. Es sind äquivalent:

(i) Das Ideal I ist nulldimensional;
(ii) für $i = 1, \dots, n$ gibt es ein $0 \neq f_i \in I$ mit $\mathrm{LM}_{\preceq}(f_i) = x_i^{k_i}$ (für ein $k_i \geq 0$);
(iii) es gibt nur endlich viele Monome, die nicht in $\mathrm{LI}_{\preceq}(I)$ liegen.

Aufgabe 18

Sei $I \subseteq k[x, y, z]$ das Verschwindungsideal von $C = \{(t^3, t^4, t^5) \colon t \in K\}$.

(a) $I = k[x, y, z] \cap J$ mit $J := (x - t^3,\ y - t^4,\ z - t^5)$. ($J$ ist ein Ideal in $k[t, x, y, z]$.)
(b) Benutze `SINGULAR`, um eine *lex*-Gröbnerbasis H von J zu finden, und leite aus H eine *lex*-Gröbnerbasis G von I ab.
(c) Drücke die Elemente von G durch das in Aufgabe 15 gefundene Erzeugendensystem von I aus.

Aufgabe 19

Sei $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_m)$, seien $f_1, \dots, f_n,\ h \in k[\mathtt{x}]$ mit $h \neq 0$, und sei V der Zariskiabschluß des Bildes der Abbildung

$$\mathbb{A}^m \smallsetminus \mathcal{V}(h) \to \mathbb{A}^n, \quad x \mapsto \Big(\frac{f_1(x)}{h(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{h(x)}\Big).$$

Zeige: $\mathcal{I}(V) = k[\mathtt{y}] \cap J$ mit $J := \big(ht - 1,\ y_1 - tf_1,\ \dots,\ y_n - tf_n\big)$ (Ideal in $k[t, \mathtt{x}, \mathtt{y}]$, mit $\mathtt{y} = (y_1, \dots, y_n)$).

Aufgabe 20

Sei $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{s \times n}(k)$, und sei

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \in k[x_1, \dots, x_n]$$

($i = 1, \dots, s$). Sei $B = (b_{ij})$ die durch elementare Zeilenumformungen hergestellte reduzierte Zeilenstufenform der Matrix A (reduziert heißt: mit Pivotelement 1 in jeder Zeile), und sei

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \quad (i = 1, \dots, s).$$

Sei $r = \mathrm{rk}(A)$, und sei $\preceq$ eine Monomordnung mit $x_1 \succ x_2 \succ \cdots \succ x_n$. Man zeige: $\{g_1, \ldots, g_r\}$ ist die reduzierte Gröbnerbasis des Ideals $(f_1, \ldots, f_s)$ bezüglich $\preceq$.

Hinweis: Man benutze das Buchberger-Kriterium.