Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 6

Abgabe: Mittwoch 1. Dezember 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 21

Betrachte das von $x_1^2 + x_2x_3 - x_1$, $x_2^2 + x_3x_1 - x_2$ und $x_3^2 + x_1x_2 - x_3$ erzeugte Ideal I in $k[x_1, x_2, x_3]$. (Es sei $\mathrm{char}(k) = 0$.)

(a) Berechne die Durchschnitte $I \cap k[x_i]$ für $i = 1, 2, 3$ (mit Hilfe von `SINGULAR`).
(b) Zeige, daß I ein 0-dimensionales Ideal ist, und bestimme Erzeuger für $\sqrt{I}$.
(c) Bestimme die Menge $\mathcal{V}(I) \subseteq \mathbb{A}^3$.

Aufgabe 22

Sei S ein G-graduierter Ring, und seien I, J homogene Ideale von S. Dann ist auch das Ideal $(I : J)$ homogen.

Aufgabe 23

Sei G eine Untergruppe von $\mathbb{R}^n$, sei S ein G-graduierter Ring, und sei I ein homogenes Ideal in S. Dann sind auch alle minimalen Primteiler von I homogen. (*Anleitung:* Für jedes Ideal J setze man $J^* := \bigoplus_{g \in G}(J \cap S_g)$ und zeige: Ist J ein Primideal, so auch J^*.)

Aufgabe 24

Sei M ein A-Modul.

(a) Sei B eine A-Algebra. Durch

$$b \cdot (x \otimes b') \ := \ x \otimes (bb') \quad (x \in M,\ b.\, b' \in B)$$

erhält $M \otimes_A B$ eine wohldefinierte Struktur als B-Modul.

(b) Die A_S-lineare Abbildung

$$M \otimes_A A_S \to M_S, \quad x \otimes \frac{a}{s} \mapsto \frac{ax}{s}$$

ist wohldefiniert und ist ein Isomorphismus der A_S-Moduln.

Hinweis: In (b) konstruiere man die Umkehrabbildung.