

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 7

Abgabe: Mittwoch 8. Dezember 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k .

Aufgabe 25

- (a) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine k -abgeschlossene Teilmenge. Der projektive Koordinatenring $k_+[V]$ ist eine reduzierte endlich erzeugte \mathbb{Z} -graduierte k -Algebra, die als k -Algebra von homogenen Elementen von Grad 1 erzeugt wird.
- (b) Umgekehrt sei S eine reduzierte endlich erzeugte \mathbb{Z} -graduierte k -Algebra mit $S_0 = k$, die als k -Algebra von S_1 erzeugt wird. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine k -abgeschlossene Menge $V \subseteq \mathbb{P}^n$, so daß S und $k_+[V]$ als \mathbb{Z} -graduierte k -Algebren isomorph sind.

Aufgabe 26

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, sei I ein Ideal in $k[\mathbf{x}]$, und sei I^h seine Homogenisierung in $k[x_0, \mathbf{x}]$.

- (a) Sei $g \in I^h$ homogen, sei $\tilde{g} = g(1, \mathbf{x})$ die Dehomogenisierung von g . Dann ist $\tilde{g} \in I$.
- (b) $\sqrt{I^h} = (\sqrt{I})^h$.
- (c) Genau dann ist I ein Primideal, wenn I^h ein Primideal ist.

Folgere aus (c): Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\overline{V} \subseteq \mathbb{P}^n$ ihr projektiver Abschluß, so ist V genau dann irreduzibel, wenn \overline{V} es ist.

Aufgabe 27

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $C = \{(t, t^2, \dots, t^n) : t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^n$, sei \overline{C} der projektive Abschluß von C in \mathbb{P}^n .

- (a) C ist eine irreduzible und abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{A}^n .
- (b) Es gibt einen Punkt $P \in \mathcal{V}_+(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $\overline{C} = C \cup \{P\}$ — welchen?
- (c) \overline{C} ist die projektive Nullstellenmenge des homogenen Ideals, das von allen 2×2 -Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

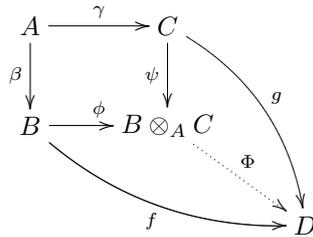
erzeugt wird.

(C bzw. \overline{C} heißt *rationale Normalenkurve*.)

Aufgabe 28

Seien A, B, C Ringe und $\beta: A \rightarrow B, \gamma: A \rightarrow C$ Ringhomomorphismen. Zeige:

- $B \otimes_A C$ hat eine Ringstruktur mit $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ für alle $b, b' \in B$ und $c, c' \in C$.
- Die Abbildungen $\phi: B \rightarrow B \otimes_A C, b \mapsto b \otimes 1$, und $\psi: C \rightarrow B \otimes_A C, c \mapsto 1 \otimes c$ sind Ringhomomorphismen, und es gilt $\phi \circ \beta = \psi \circ \gamma$.
- Der Ring $B \otimes_A C$, zusammen mit den Homomorphismen ϕ und ψ , hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu je zwei Ringhomomorphismen $f: B \rightarrow D$ und $g: C \rightarrow D$ mit $f \circ \beta = g \circ \gamma$ gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\Phi: B \otimes_A C \rightarrow D$ mit $f = \Phi \circ \phi$ und $g = \Phi \circ \psi$:



Man schreibt $f \otimes g$ für Φ .

(*Hinweis:* B bzw. C ist ein A -Modul via β bzw. γ , das erklärt das Tensorprodukt $B \otimes_A C$.)