Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

**Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie**

**Blatt 7**

**Abgabe:** Mittwoch 8. Dezember 2010, in der Vorlesung

Sei stets $k$ ein Körper und $K$ ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von $k$.

### Aufgabe 25

(a) Sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine $k$-abgeschlossene Teilmenge. Der projektive Koordinatenring $k_+[V]$ ist eine reduzierte endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-graduierte $k$-Algebra, die als $k$-Algebra von homogenen Elementen von Grad 1 erzeugt wird.
(b) Umgekehrt sei $S$ eine reduzierte endlich erzeugte $\mathbb{Z}$-graduierte $k$-Algebra mit $S_0 = k$, die als $k$-Algebra von $S_1$ erzeugt wird. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine $k$-abgeschlossene Menge $V \subseteq \mathbb{P}^n$, so daß $S$ und $k_+[V]$ als $\mathbb{Z}$-graduierte $k$-Algebren isomorph sind.

### Aufgabe 26

Sei $\mathtt{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, sei $I$ ein Ideal in $k[\mathtt{x}]$, und sei $I^h$ seine Homogenisierung in $k[x_0, \mathtt{x}]$.

(a) Sei $g \in I^h$ homogen, sei $\widetilde{g} = g(1, \mathtt{x})$ die Dehomogenisierung von $g$. Dann ist $\widetilde{g} \in I$.
(b) $\sqrt{I^h} = (\sqrt{I})^h$.
(c) Genau dann ist $I$ ein Primideal, wenn $I^h$ ein Primideal ist.

Folgere aus (c): Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine abgeschlossene Teilmenge und $\overline{V} \subseteq \mathbb{P}^n$ ihr projektiver Abschluß, so ist $V$ genau dann irreduzibel, wenn $\overline{V}$ es ist.

### Aufgabe 27

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $C = \{(t, t^2, \ldots, t^n) \colon t \in K\} \subseteq \mathbb{A}^n$, sei $\overline{C}$ der projektive Abschluß von $C$ in $\mathbb{P}^n$.

(a) $C$ ist eine irreduzible und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n$.
(b) Es gibt einen Punkt $P \in \mathcal{V}_+(x_0) \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $\overline{C} = C \cup \{P\}$ — welchen?
(c) $\overline{C}$ ist die projektive Nullstellenmenge des homogenen Ideals, das von allen $2 \times 2$-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

erzeugt wird.

($C$ bzw. $\overline{C}$ heißt *rationale Normalenkurve.*)

**Aufgabe 28**

Seien $A$, $B$, $C$ Ringe und $\beta\colon A \to B$, $\gamma\colon A \to C$ Ringhomomorphismen. Zeige:

(a) $B \otimes_A C$ hat eine Ringstruktur mit $(b \otimes c) \cdot (b' \otimes c') = bb' \otimes cc'$ für alle $b$, $b' \in B$ und $c$, $c' \in C$.

(b) Die Abbildungen $\phi\colon B \to B \otimes_A C$, $b \mapsto b \otimes 1$, und $\psi\colon C \to B \otimes_A C$, $c \mapsto 1 \otimes c$ sind Ringhomomorphismen, und es gilt $\phi \circ \beta = \psi \circ \gamma$.

(c) Der Ring $B \otimes_A C$, zusammen mit den Homomorphismen $\phi$ und $\psi$, hat die folgende universelle Eigenschaft: Zu je zwei Ringhomomorphismen $f\colon B \to D$ und $g\colon C \to D$ mit $f \circ \beta = g \circ \gamma$ gibt es einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\Phi\colon B \otimes_A C \to D$ mit $f = \Phi \circ \phi$ und $g = \Phi \circ \psi$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\psi"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
B \arrow[r, "\phi"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & B \otimes_A C \arrow[dr, dotted, "\Phi"] & \\
 & & D
\end{tikzcd}$$

Man schreibt $f \otimes g$ für $\Phi$.

(*Hinweis:* $B$ bzw. $C$ ist ein $A$-Modul via $\beta$ bzw. $\gamma$, das erklärt das Tensorprodukt $B \otimes_A C$.)