Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 8

Abgabe: Mittwoch 15. Dezember 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 29
Sei $\mathrm{char}(k) \neq 2$, sei

$$q \;=\; \sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

eine quadratische Form über k mit $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j. Hat die symmetrische Matrix $(a_{ij})_{0\le i,j\le n}$ mindestens Rang 3, so ist die Quadrik $V = \mathcal{V}_+(q)$ im $\mathbb{P}^n$ k-irreduzibel.

Aufgabe 30
Sei V eine irreduzible k-Varietät. Dann ist der Ring $\mathcal{O}(V)$ nullteilerfrei. Für jede nichtleere offene Teilmenge U von V ist die Restriktionsabbildung $\mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(U)$ injektiv.

Aufgabe 31
Begründe, daß die beiden folgenden Abbildungen wohldefiniert sind, und benutze `SINGULAR`, um ihre Bildmengen zu bestimmen:

(a) $f\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2,\;\; f(x_0 : x_1) = (x_0^2 + x_1^2 : 2x_0x_1 : x_0^2 - x_1^2)$;
(b) $f\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5,\;\; f(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2)$.

Aufgabe 32
Sei $\mathtt{x} = (x_0, x_1)$.

(a) Seien r, $s \geq 1$, und seien $f = \sum_{i=0}^{r} a_i x_0^i x_1^{r-i}$, $g = \sum_{j=0}^{s} b_j x_0^j x_1^{s-j}$ (mit a_i, $b_j \in k$) zwei binäre Formen in $k[\mathtt{x}]$ mit $\deg(f) = r$ und $\deg(g) = s$. Die *Resultante* $\mathrm{res}(f, g)$ von f und g ist definiert als die $(r+s)\times(r+s)$-Determinante

$$\mathrm{res}(f,g) \;=\; \det\begin{pmatrix}
a_0 & & & & b_0 & & & & \\
a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 & & & \\
\vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_0 & b_s & \vdots & \ddots & \ddots & \\
a_r & \vdots & & a_1 & & b_s & & \ddots & b_0 \\
 & a_r & & \vdots & & & \ddots & & b_1 \\
 & & \ddots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & a_r & & & & & b_s
\end{pmatrix}.$$

Man zeige: $\operatorname{res}(f,g) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ggT}(f,g) \neq 1 \Leftrightarrow$ es gibt $(a_0 : a_1) \in \mathbb{P}^1(K)$ mit $f(a_0, a_1) = g(a_0, a_1) = 0$.

(b) Sei $\mathtt{y} = (y_1, \dots, y_n)$, seien $f,\ g \in k[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ homogen bezüglich $\mathtt{x}$, und sei

$$X \;:=\; \{(a,b) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n \colon f(a,b) = g(a,b) = 0\}.$$

Sei $\pi\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ die durch $\pi(a,b) = b$ definierte Projektion. Dann ist $R(\mathtt{y}) := \operatorname{res}(f(\mathtt{x},\mathtt{y}),\ g(\mathtt{x},\mathtt{y}))$ (die Resultante bezüglich $\mathtt{x}$) ein Polynom in $k[\mathtt{y}]$, und

$$\pi(X) \;=\; \{b \in \mathbb{A}^n \colon R(b) = 0\}.$$

Anleitung zu (a): Betrachte die lineare Abbildung

$$k[\mathtt{x}]_{s-1} \oplus k[\mathtt{x}]_{r-1} \;\to\; k[\mathtt{x}]_{r+s-1}, \quad (p,q) \mapsto pf + qg,$$

wobei $k[\mathtt{x}]_d$ den Raum aller Formen vom Grad d in $k[\mathtt{x}]$ bezeichnet, und wähle geeignete Basen für die Vektorräume.