Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
WS 2010/11

Übungen zur Vorlesung Algorithmische algebraische Geometrie

Blatt 9

Abgabe: Mittwoch 22. Dezember 2010, in der Vorlesung

Sei stets k ein Körper und K ein algebraisch abgeschlossener Oberkörper von k.

Aufgabe 33

Für die kubische Kurve $C = \mathcal{V}_+(x_0x_2^2 - x_1^3)$ im $\mathbb{P}^2$ finde man endlich viele Quadriken im $\mathbb{P}^5$, zu deren Durchschnitt C isomorph ist.

Anleitung: Betrachte die Veroneseeinbettung $v_2\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ und bestimme homogene quadratische Polynome $p_1, \dots, p_r$ in $k[z_0, \dots, z_5]$ mit

$$v_2(C) \;=\; v_2(\mathbb{P}^2) \cap \mathcal{V}_+(p_1, \dots, p_r).$$

Aufgabe 34

Sei $n \geq 2$. Betrachte die offene Untervarietät $U = \mathbb{A}^n \smallsetminus \{(0,0)\}$ von $\mathbb{A}^n$ und zeige, daß die Restriktionsabbildung

$$k[x_1, \dots, x_n] = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(U), \quad f \mapsto f|_U$$

ein Isomorphismus ist. Folgere daraus, daß die Varietät U nicht affin ist.

Aufgabe 35

Sei A ein Ring, und seien

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \longrightarrow 0, \quad N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$$

zwei exakte Sequenzen von A-Moduln. Dann ist auch die Sequenz

$$(M' \otimes N) \oplus (M \otimes N') \xrightarrow{\phi} M \otimes N \xrightarrow{f \otimes g} M'' \otimes N'' \longrightarrow 0$$

exakt, wobei ϕ die A-lineare Abbildung mit

$$\phi(x' \otimes y,\, x \otimes y') \;=\; f'(x) \otimes y + x \otimes g'(y)$$

ist. ($\otimes := \otimes_A$)

Anleitung: Jage das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M' \otimes N' \arrow[r, "f'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g'"'] & M \otimes N' \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g'"'] & M'' \otimes N' \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g'"'] & 0 \\
M' \otimes N \arrow[r, "f'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"'] & M \otimes N \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"'] & M'' \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"'] & 0 \\
M' \otimes N'' \arrow[r, "f'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d] & M \otimes N'' \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d] & M'' \otimes N'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(Es ist kommutativ und hat exakte Zeilen und Spalten, warum?)

Aufgabe 36

Sei A ein Ring, seien $\mathtt{x} = (x_1, \dots, x_m)$ und $\mathtt{y} = (y_1, \dots, y_n)$ Tupel von Variablen.

(a) Es ist $A[\mathtt{x}] \otimes_A A[\mathtt{y}] \cong A[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ (Isomorphie von A-Algebren).

(b) Sind $I \subseteq A[\mathtt{x}]$ und $J \subseteq A[\mathtt{y}]$ Ideale, so ist

$$(A[\mathtt{x}]/I) \otimes_A (A[\mathtt{y}]/J) \;\cong\; A[\mathtt{x}, \mathtt{y}]/P,$$

wobei P das von I und J in $A[\mathtt{x}, \mathtt{y}]$ erzeugte Ideal ist. (Verwende Aufgabe 35.)

(c) Ist k ein Körper, und sind V, W affine k-Varietäten, so ist

$$k[V \times W] \;\cong\; \big(k[V] \otimes_k k[W]\big)_{\mathrm{red}},$$

wobei $A_{\mathrm{red}} = A/\mathrm{Nil}(A)$ der zu A assoziierte reduzierte Ring ist.

(d) Ist k ein nicht vollkommener Körper mit $\mathrm{char}(k) = p > 0$, und ist $a \in k \smallsetminus k^p$, so ist $L = k[t]/(t^p - a)$ ein Körper, aber der Ring $L \otimes_k L$ ist nicht reduziert.