Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 1
19.10.2009

Lineare Algebra I

Aufgabe 1.1:

Zu zwei Mengen A und B sei die **symmetrische Differenz** folgendermaßen definiert:

$$A \bigtriangleup B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Überprüfen Sie die Wahrheit der folgenden Aussagen für beliebige Mengen A, B, C, indem Sie jeweils beide Inklusionen überprüfen. Geben Sie ein Gegenbeispiel an, wenn eine der Aussagen nicht für alle Mengen A, B, C wahr ist.

(a) $A \bigtriangleup \varnothing = A$

(b) $A \bigtriangleup A = \varnothing$

(c) $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

(d) $(A \bigtriangleup B) \bigtriangleup C = A \bigtriangleup (B \bigtriangleup C)$

(e) $A \bigtriangleup B = B \bigtriangleup A$

(f) $(A \bigtriangleup B) \cup C = (A \cup C) \bigtriangleup (B \cup C)$

(g) $(A \bigtriangleup B) \cap C = (A \cap C) \bigtriangleup (B \cap C)$

(h) $A \setminus (B \bigtriangleup C) = (A \setminus B) \bigtriangleup (A \setminus C)$

(i) $(A \bigtriangleup B) \setminus C = (A \setminus C) \bigtriangleup (B \setminus C)$

Aufgabe 1.2:

Wir betrachten eine beliebige Schulklasse S und die Abbildung $f\colon S \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die jedem Schüler seine Mathematiknote zuordnet. Erklären Sie, was es bedeutet, wenn diese Abbildung

(a) surjektiv,

(b) nicht injektiv,

(c) bijektiv

ist.

Aufgabe 1.3:

Entscheiden Sie, ob die folgenden Zuordnungsvorschriften eine Abbildung $M \to N$ definieren. Wenn ja, geben Sie außerdem an, ob die jeweilige Abbildung injektiv oder surjektiv ist. Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(a) $M = \{\text{a, b, c, d, e}\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, a $\mapsto$ 4, b $\mapsto$ 1, c $\mapsto$ 7, d $\mapsto$ 1, e $\mapsto$ 2
(a, b, c, d, e sind Buchstaben)

(b) $M = \{\text{A, B, C}\}$, $N = \{\text{A}, 2, 4\}$, A $\mapsto$ 4, B $\mapsto$ A, C $\mapsto$ 2 (A, B, C sind Buchstaben)

Bitte wenden.

(c) $M = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$, $N = \{(1,1), (2,5), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$, $\frac{x}{y} \mapsto (x,y)$

(d) $M = \{\text{Studenten der Uni Konstanz}\}$, $N = \{\text{Tage im Jahr}\}$,
Student $\mapsto$ Geburtstag des Studenten

(e) $M = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$, $N = \mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$, $X \mapsto X \cup \{4\}$

(f) $M = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $N = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $X \mapsto X \setminus \{\varnothing\}$

(g) $M = \{0,1\}^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} = N$, $(x,y,z) \mapsto (x^2, y^3, z^4)$

(h) $M = \{0,1\}^3 = N$, $(x,y,z) \mapsto (yz, xz, xy)$

Aufgabe 1.4:

Stellen Sie sich vor, es gebe ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern, eines für jede natürliche Zahl. Nehmen Sie außerdem an, dieses Hotel wäre voll belegt. Nun erreichen aber weitere Gäste dieses Hotel. Wie könnte man in den folgenden Situationen vorgehen, damit diese Gäste auch noch untergebracht werden können? (Natürlich, ohne einen der bisherigen Gäste aus dem Hotel zu werfen.) Begründen Sie Ihre Aussagen.

(a) Es erreicht ein neuer Gast das Hotel.

(b) Es erreichen siebzehn neue Gäste das Hotel.

(c) Es erreicht ein voller Großraumbus mit abzählbar unendlich vielen Plätzen (die mit natürlichen Zahlen durchnummeriert sind) das Hotel.

(d) Es erreichen abzählbar unendlich viele solcher Großraumbusse (die mit natürlichen Zahlen durchnummeriert sind) das Hotel.

Abgabe bis Montag, den 26. Oktober, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.