Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 10
11.01.2010

Lineare Algebra I

Aufgabe 10.1:

Sei K ein Körper.

(a) Zeigen oder widerlegen Sie: $K^{n\times n}$ ist zusammen mit der Matrizenaddition und dem Matrizenprodukt ein kommutativer Ring.

(b) Berechnen Sie folgende Matrizenprodukte.

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } K = \mathbb{F}_2.$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } K = \mathbb{F}_5.$$

(c) Seien $A, B \in K^{n\times n}$ schwache magische Quadrate (vgl. Aufgabe 9.12). Zeigen Sie, dass dann auch AB ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen–/Spaltensumme $s(AB) = s(A)s(B)$ ist.

Aufgabe 10.2:

Sei K ein Körper. Für $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$ heißt $A^{\mathrm{T}} := (a_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ die zu A **transponierte Matrix**. Seien nun $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie:

(a) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

(b) Ist A invertierbar, so auch A^{T}, und es gilt $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

(c) Ist $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ invertierbar und gilt $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, so ist $A' := (a_{ij}^2)_{1\leq i,j\leq n}$ ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen–/Spaltensumme $s(A') = 1$ (vgl. Aufgabe 9.12).

Aufgabe 10.3:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 2 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

einmal über dem Körper $\mathbb{Q}$ und einmal über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

Bitte wenden.

Aufgabe 10.4:

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$ gibt. Ist f injektiv oder surjektiv? Liegt das Element

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im Bild von f? Falls ja, bestimmen Sie alle Urbilder von z.

Aufgabe 10.5:

Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$. Seien $\underline{v} = (1, X, X^2, X^3)$ und $\underline{w} = (1, X-1, X^2-2X+1, -X^3+3X^2-3X+1)$. Wir definieren

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}[X]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[X]_3, \\ \sum_{i=0}^{3} a_i X^i &\longmapsto \sum_{i=0}^{3} a_i (2X-1)^i \quad (a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{v}$ und $\underline{w}$ Basen von $\mathbb{R}[X]_3$ sind.

(c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $M(f, \underline{v}, \underline{v})$.

(d) Bestimmmen Sie $M(\mathrm{id}, \underline{v}, \underline{w})$ und $M(\mathrm{id}, \underline{w}, \underline{v})$.

(e) Berechnen Sie $M(f, \underline{w}, \underline{w})$ einmal mithilfe der letzten Teilaufgaben und einmal direkt.

(f) Finden Sie ein Polynom $q \in \mathbb{R}[X]_3$, so dass $f(q) = -8X^3 + 40X^2 - 12X + 9$ ist.

Abgabe bis Montag, den 18. Januar, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.