Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Übungsblatt 12
25.01.2010

Lineare Algebra I

Aufgabe 12.1:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen der Permutation

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}, \quad i \mapsto n - i + 1.$$

Aufgabe 12.2:

Seien f und g Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums. Zeigen Sie:

1. Die Determinante von f ist genau dann ungleich 0, wenn f bijektiv ist.
2. $\det(f \circ g) = (\det f)(\det g)$.

Aufgabe 12.3:

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Außerdem sei A invertierbar. Zeigen Sie, dass genau dann alle Koeffizienten von A^{-1} ganzzahlig sind, wenn $|\det A| = 1$ gilt.

Aufgabe 12.4:

Sei R ein kommutativer Ring. Eine Abbildung $\delta\colon R \to R$ heißt **Derivation**, wenn für alle $x, y \in R$ gilt:

(i) $\delta(x + y) = \delta(x) + \delta(y)$,

(ii) $\delta(xy) = x\delta(y) + \delta(x)y$.

Sei K ein Körper, und sei $D\colon K[X] \to K[X]$ die formale Ableitung. Zeigen Sie, dass D eine Derivation auf $K[X]$ ist.

Aufgabe 12.5:

(a) Bestimmen Sie die Determinanten folgender am Anfang von §6.3 stehenden Beispiele von Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume: die Drehungen R_φ ($\varphi \in \mathbb{R}$), die Spiegelungen R an den Koordinatenachsen, die Projektionen P auf die Koordinatenachsen, die Scherungen S_a ($a \in \mathbb{R}$) an der ersten Koordinatenachse, die lineare Abbildungen f_A ($A \in K^{n \times n}$), die formalen Ableitung $D^{(d)}$ ($d \in \mathbb{N}_0$) und die komplexe Konjugation C.

(b) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in K^{5 \times 5}.$$

Bitte wenden.

(c) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} -X & 5 & -1 \\ 1 & 1-X & 0 \\ 3 & 3 & -2-X \end{pmatrix} \in K[X]^{3\times 3}.$$

(d) Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \dots, a_n \in K$. Zeigen Sie, dass für die $n \times n$–Vandermonde–Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

die Gleichung $\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ gilt.

(Anleitung: Führen Sie eine Induktion nach n. Ziehen Sie dabei im Induktionsschritt $n \to n+1$ nacheinander für $j = n+1, \dots, 2$ das a_1-fache der $(j-1)$-ten Spalte von der j-ten Spalte ab und entwickeln Sie dann nach der ersten Zeile.)

(e) Sei $a \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} F_a \colon \mathbb{Q}[X]_4 &\longrightarrow \mathbb{Q}[X]_4 \\ p &\longmapsto D((X-a)p), \end{aligned}$$

wobei D die formale Ableitung auf $\mathbb{Q}[X]$ ist.
Bestimmmen Sie für alle $a \in \mathbb{Q}$ die Determinante von F_a.

(Hinweis: Falls Sie nicht gleich darauf kommen, bestimmen Sie zuerst F_0. Denken Sie daran, dass Sie Freiheiten bezüglich der Wahl der Basis haben.)

Abgabe bis Montag, den 1. Februar, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.