Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 1
04.11.2009

Lineare Algebra I

Lösung 1.1:

Voraussetzung: Seien A, B und C beliebige Mengen.

(a) Behauptung: Es gilt $A \triangle \varnothing = A$.
Beweis: Es ist $A \triangle \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A)$. Aus der Definition der Mengendifferenz sieht man sofort $A \setminus \varnothing = A$ und $\varnothing \setminus A = \varnothing$. Aus der Definition der Vereinung folgt $A \cup \varnothing = A$. Somit sind beide zu zeigenden Inklusionen erfüllt, es gilt also die Gleichheit.

(b) Behauptung: $A \triangle A = \varnothing$.
Beweis: Es ist $A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$. Da $A \setminus A = \varnothing$ ist, folgt auch hier sofort die Gleichheit.

(c) Behauptung: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Beweis: Sei $x \in A \triangle B$. Dann gilt laut Definition $x \in A \setminus B$ (1. Fall) oder $x \in B \setminus A$ (2. Fall). Im ersten Fall ist $x \in A$, also liegt x auch in der Obermenge $A \cup B$. Da außerdem $x \notin B$ gilt, kann x aber nicht in $A \cap B$ liegen, da dies eine Teilmenge von B ist. Der zweite Fall geht aus Symmetriegründen genauso. Es müssen nur A und B in der Argumentation vertauscht werden. Somit haben wir die Inklusion $\subseteq$ gezeigt.
Sei nun $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Es gilt also $x \in A \cup B$, d.h. x ist Element von A (1. Fall) oder x ist Element von B (2. Fall). Wir betrachten den ersten Fall, also $x \in A$. Da wir wissen, dass außerdem $x \notin A \cap B$ gilt, kann x nicht auch in B liegen. Somit gilt $x \in A \setminus B$. Im zweiten Fall erhalten wir auf diese Weise, dass $x \in B \setminus A$ gilt. Beide Fälle zusammengenommen ergeben, dass x Element von $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B$ ist, und wir haben auf diese Weise die Inklusion $\supseteq$ gezeigt.

(d) Behauptung: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
Beweis: Wir zeigen wieder zuerst die Inklusion $\subseteq$. Sei dafür $x \in (A \triangle B) \triangle C$. Das heißt x ist in $((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \setminus C$ (Fall 1) oder x ist in $C \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$ (Fall 2).
Wir betrachten zuerst Fall 1. Also liegt x in A, aber nicht in B und nicht in C, (Fall 1.1) oder in B, aber nicht in A und nicht in C (Fall 1.2). In Fall 1.1 liegt x nicht in $B \cup C$, somit auch nicht in $B \triangle C$, was ja nach Aufgabenteil (b) eine Teilmenge von $B \cup C$ ist. Insgesamt folgt: $x \in A \setminus (B \triangle C)$. In Fall 1.2 liegt x in $B \setminus C$, dies ist aber eine Teilmenge von $B \triangle C$. Da x aber außerdem nicht in A liegt, gilt insgesamt $x \in (B \triangle C) \setminus A$. Da $A \triangle (B \triangle C) = (A \setminus (B \triangle C)) \cup ((B \triangle C) \setminus A)$ ist, ist der erste Fall erledigt.
Nun betrachten wir Fall 2. Es liegt x in C aber nicht in $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, also ist x weder in $A \setminus B$ noch in $B \setminus A$. Also ist x in A genau dann, wenn x in B ist. Ist x in A und in B, dann liegt x weder in $B \setminus C$ (x liegt ja in C) noch in $C \setminus B$. Insgesamt folgt: $x \in A \setminus (B \triangle C)$. Liegt x weder in A noch in B, dann ist x in $C \setminus B$, also auch in $B \triangle C$, und damit in $(B \triangle C) \setminus A$. Fall 2 ist damit auch wegen $A \triangle (B \triangle C) = (A \setminus (B \triangle C)) \cup ((B \triangle C) \setminus A)$ erledigt.
Jetzt müssen wir die andere Inklusion $\supseteq$ zeigen. Sei $x \in A \triangle (B \triangle C)$, d.h. x ist in $A \setminus (B \triangle C)$ (1. Fall) oder in $(B \triangle C) \setminus A$ (2. Fall).
Im ersten Fall ist x in A, aber weder liegt x in $B \setminus C$ noch in $C \setminus B$, also gilt $x \in B$

genau dann, wenn $x \in C$ gilt. Ist x in B und C, so ist x nicht in $A \setminus B$ (da $x \in A$) und nicht in $B \setminus A$, also gilt $x \in C \setminus (A \triangle B)$. Ist x weder in B noch in C, so gilt $x \in (A \setminus B) \setminus C$. Dies ist aber eine Teilmenge von $(A \triangle B) \setminus C$. Somit ist der erste Fall wegen $(A \triangle B) \triangle C = ((A \triangle B) \setminus C) \cup (C \setminus (A \triangle B))$ erledigt.
Im zweiten Fall ist x nicht in A, aber es gilt $x \in B \setminus C$ (Fall 2.1) oder $x \in C \setminus B$ (Fall 2.2). Fall 2.1 besagt dann aber, dass x in $(B \setminus A) \setminus C$ ist, was wiederum eine Teilmenge von $(A \triangle B) \setminus C$ ist. Fall 2.2 impliziert, dass x in C, aber nicht in $A \setminus B$ und auch nicht in $B \setminus A$ liegt. Also gilt $x \in C \setminus (A \triangle B)$. Wiederum sind wir wegen $(A \triangle B) \triangle C = ((A \triangle B) \setminus C) \cup (C \setminus (A \triangle B))$ fertig.
Wir haben nun beide Inklusionen, und somit die Gleichheit, gezeigt.

(e) Behauptung: $A \triangle B = B \triangle A$.
Beweis: Die Definition besagt, dass $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Es ist aber letzteres offensichtlich mit $(B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ identisch (vgl. Definition der Vereinigung zweier Mengen), was aber wiederum $B \triangle A$ ist.

(f) Behauptung: $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \cup C)$ gilt im Allgemeinen nicht.
Beweis: Ein Gegenbeispiel: Es gilt $(\{1,2,3\} \triangle \{3,4,5\}) \cup \{2,4\} = \{1,2,4,5\} \cup \{2,4\} = \{1,2,4,5\}$, aber $(\{1,2,3\} \cup \{2,4\}) \triangle (\{3,4,5\} \cup \{2,4\}) = \{1,2,3,4\} \triangle \{2,3,4,5\} = \{1,5\}$.

(g) Behauptung: $(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$.
Beweis: Die Inklusion $\subseteq$. Sei $x \in (A \triangle B) \cap C$. Das heißt x ist in C und in $A \setminus B$ (Fall 1) oder in $B \setminus A$ (Fall 2). Im ersten Fall ist x also in $A \cap C$, aber nicht in $B \cap C$. Somit gilt $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C) \subset (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. Im zweiten Fall ist x in $B \cap C$, aber nicht in $A \cap C$, und somit auch in $(A \cap C) \triangle (B \cap C)$.
Die Inklusion $\supseteq$. Sei $x \in (A \cap C) \triangle (B \cap C)$. Also $x \in (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ (Fall 1) oder $x \in (B \cap C) \setminus (A \cap C)$ (Fall 2). In beiden Fällen ist $x \in C$. Im ersten Fall ist x außerdem in $A \setminus B$, im zweiten Fall in $B \setminus A$. In jedem Fall ist x also Element von $(A \triangle B) \cap C$.

(h) Behauptung: $A \setminus (B \triangle C) = (A \setminus B) \triangle (A \setminus C)$ gilt im Allgemeinen nicht.
Beweis: Gegenbeispiel: Es ist $\{1,2,3,4,5\} \setminus (\{1,2,3\} \triangle \{3,4,5\}) = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,4,5\} = \{3\}$, aber $(\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,2,3\}) \triangle (\{1,2,3,4,5\} \setminus \{3,4,5\}) = \{4,5\} \triangle \{1,2\} = \{1,2,4,5\}$.

(i) Behauptung: $(A \triangle B) \setminus C = (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.
Beweis: Die Inklusion $\subseteq$. Sei $x \in (A \triangle B) \setminus C$. Das heißt x ist nicht in C aber in $A \setminus B$ (Fall 1) oder in $B \setminus A$ (Fall 2). Im ersten Fall ist x also in $A \setminus C$, aber nicht in B, was wiederum eine Obermenge von $B \setminus C$ ist. Somit gilt $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) \subset (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$. Im zweiten Fall ist x in $B \setminus C$, aber nicht in $A \setminus C$, und somit auch in $(A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$.
Die Inklusion $\supseteq$. Sei $x \in (A \setminus C) \triangle (B \setminus C)$. Also $x \in (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ (Fall 1) oder $x \in (B \setminus C) \setminus (A \setminus C)$ (Fall 2). In beiden Fällen gilt $x \notin C$. Im ersten Fall ist x in $A \setminus B$, im zweiten Fall in $B \setminus A$. In jedem Fall ist x also Element von $(A \triangle B) \setminus C$.

Lösung 1.2:

(a) Die Surjektivität der Abbildung bedeutet, dass jede Note in $\{1,2,3,4,5,6\}$ mindestens ein Urbild hat. Das heißt, zu jeder Note gibt es mindestens einen Schüler, der diese Note hat. Mit anderen Worten, es wurde jede Note vergeben.

(b) Die Injektivität bedeutet, dass keine zwei Schüler dieselbe Note bekommen. Ist die Abbildung nicht injektiv, gibt es somit mindestens zwei Schüler, die dieselbe Note bekommen.

(c) Ist die Abbildung bijektiv, so ist sie injektiv und surjektiv. Das bedeutet, jede Note kommt exakt einmal vor. Insbesondere folgt daraus, dass die Klasse aus genau sechs Schülern besteht und alle verschiedene Noten bekommen.

Lösung 1.3:

(a) Voraussetzung: $M = \{$a, b, c, d, e$\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ (a, b, c, d, e sind Buchstaben).
Behauptung: a $\mapsto$ 4, b $\mapsto$ 1, c $\mapsto$ 7, d $\mapsto$ 1, e $\mapsto$ 2 definiert eine Abbildung von M nach N, die weder injektiv noch surjektiv ist.
Beweis: Jedem Element aus der Menge M wird exakt ein Element der Menge N zugeordnet, daher handelt es sich tatsächlich um eine Abbildung. Die 1 hat die beiden Urbilder b und d, also ist die Abbildung nicht injektiv. Die 3 hat gar kein Urbild, also ist die Abbildung auch nicht surjektiv.

(b) Voraussetzung: $M = \{$A, B, C$\}$, $N = \{$A, 2, 4$\}$ (A, B, C sind Buchstaben).
Behauptung: A $\mapsto$ 4, B $\mapsto$ A, C $\mapsto$ 2 definiert eine bijektive Abbildung von M nach N.
Beweis: Jedem Element aus M wird genau ein Element aus N zugeordnet, wir haben es hier also mit einer Abbildung zu tun. Da außerdem jedes Element aus N genau ein Urbild hat, ist diese Abbildung bijektiv.

(c) Voraussetzung: $M = \{\frac{1}{1}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$, $N = \{(1,1), (2,5), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.
Behauptung: $\frac{x}{y} \mapsto (x, y)$ definiert keine Abbildung von M nach N.
Beweis: Hier liegt keine Abbildung vor, da dem Element $1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2}$ sowohl das Paar $(1, 1)$ als auch das Paar $(2, 2)$ zugeordnet werden.

(d) Voraussetzung: $M = \{$Studenten der Uni Konstanz$\}$, $N = \{$Tage im Jahr$\}$.
Behauptung: Student $\mapsto$ Geburtstag des Studenten definiert eine nicht injektive Abbildung von M nach N.
Beweis: Man prüft zuerst nach, dass es sich tatsächlich um eine Abbildung handelt. Dies ist aber der Fall, da ein Student aus M an genau einem Tag im Jahr Geburtstag hat. Die Abbildung ist keinesfalls injektiv, da es an der Uni mehr als 366 Studenten gibt und somit zwei am selben Tag Geburtstag haben. Über die Surjektivität lässt sich streiten, allerdings ist es sehr wahrscheinlich, dass an jedem Tag ein Student Geburtstag hat.

(e) Voraussetzung: $M = \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, $N = \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$.
Behauptung: $X \mapsto X \cup \{4\}$ definiert eine Abbildung von M nach N, die injektiv aber nicht surjektiv ist.
Beweis: Ist A eine Teilmenge von $\{1, 2, 3\}$, so ist $A \cup \{4\}$ eine eindeutig bestimmte Teilmenge von $\{1, 2, 3, 4\}$, somit definiert diese Vorschrift eine Abbildung. Sie ist nicht surjektiv, da zum Beispiel $\varnothing \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\})$ kein Urbild haben kann, weil die 4 darin nicht enthalten ist. Auf der anderen Seite ist die Abbildung jedoch injektiv. Angenommen die Menge $A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$ hätte zwei Urbilder $B, C \subseteq \{1, 2, 3\}$, dann wäre $B = A \setminus \{4\}$ und $C = A \setminus \{4\}$. Daraus folgt aber schon $B = C$.

(f) Voraussetzung: $M = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, $N = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
Behauptung: $X \mapsto X \setminus \{\varnothing\}$ definiert keine Abbildung von M nach N.
Beweis: Hier liegt keine Abbildung von M nach N vor, denn $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \setminus \{\varnothing\} = \{\{\varnothing\}\}$ ist kein Element von N.

(g) Voraussetzung: $M = \{0, 1\}^3 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} = N$.
Behauptung: $(x, y, z) \mapsto (x^2, y^3, z^4)$ definiert eine bijektive Abbilldung von M nach N.
Beweis: Da Potenzieren die Zahlen 0 und 1 nicht verändert, ordnet diese Vorschrift jedem Element $(x, y, z) \in M = \{0, 1\}^3$ das Element $(x, y, z) \in N = M$ zu. Somit liefert diese Vorschrift die Identität auf M, welche eine bijektive Abbildung ist.

(h) Voraussetzung: $M = \{0, 1\}^3 = N$.
Behauptung: $(x, y, z) \mapsto (yz, xz, xy)$ definiert eine Abbildung von M nach N, die weder injektiv noch surjektiv ist.
Beweis: Multipliziert man zwei Zahlen a, b aus $\{0, 1\}$, so liegt das Ergebnis auch

wieder in $\{0,1\}$. Es wird also jedem Element aus $M = \{0,1\}^3$ genau ein Element aus $N = \{0,1\}^3$ zugeordnet. Somit handelt es sich um eine Abbildung von M nach N. Injektivität liegt hier nicht vor, da sowohl $(0,0,0)$, als auch $(1,0,0)$ Urbilder von $(0,0,0)$ sind. Nun betrachten wir ein Element (yz, xz, xy) mit $x, y, z \in \{0,1\}$. Ist der erste Eintrag gleich 0, so ist entweder y oder z gleich 0. In beiden Fällen ist dann ein weiterer Eintrag von (yz, xz, xy) gleich 0. Daher hat das Element $(0,1,1)$ kein Urbild und die Abbildung kann nicht surjektiv sein.

Lösung 1.4:

Alle Lösungen basieren auf der Idee, die Gäste neu im Hotel anzuordnen, um weiteren Platz im Hotel zu schaffen. Dabei sind die gegebenen Lösungsmöglichkeiten nur jeweils eine von vielen.

(a) Die wohl einfachste Möglichkeit ist, jeden Gast in das Zimmer mit der nächsthöheren Zimmernummer umziehen zu lassen. Der Gast aus Zimmer n wird also höflich gebeten, sich in Zimmer $n+1$ zu begeben. Nach der Prozedur steht das erste Zimmer für den neuen Gast zur Verfügung. Um auszuschließen, dass ein Zimmer doppelt belegt wird, muss man zeigen, dass die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$ injektiv ist. Wir verschieben dies jedoch auf die nächste Teilaufgabe, wo dies in allgemeiner Form gezeigt wird.

(b) Dies funktioniert analog zum ersten Problem. Wir lassen alle Gäste 17 Zimmer weiter ziehen. Formal ausgedrückt wird der Gast aus Zimmer n in das Zimmer $n + 17$ geschickt. Auf diese Weise stehen am Schluss die ersten 17 Zimmer den neuen Gästen zur Verfügung.
Es muss noch gezeigt werden, dass die Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+17$ injektiv ist.
Ist $s \in \mathbb{N}$, so ist $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+s$ eine injektive Abbildung: Ist $n = m$ für $n, m \in \mathbb{N}$, so auch $n+s = m+s$ und beide Zahlen liegen wieder in $\mathbb{N}$. Somit ist f eine Abbildung. Gilt $f(n) = f(m)$ für zwei natürliche Zahlen n und m, dann heißt das $n+s = m+s$. Wir können $n+s$ und $m+s$ als Elemente in $\mathbb{Z}$ auffassen und auf beiden Seiten s abziehen. Dabei bleibt die Gleichheit erhalten, es gilt also auch $n = m$. Wir haben gezeigt, dass f injektiv ist.

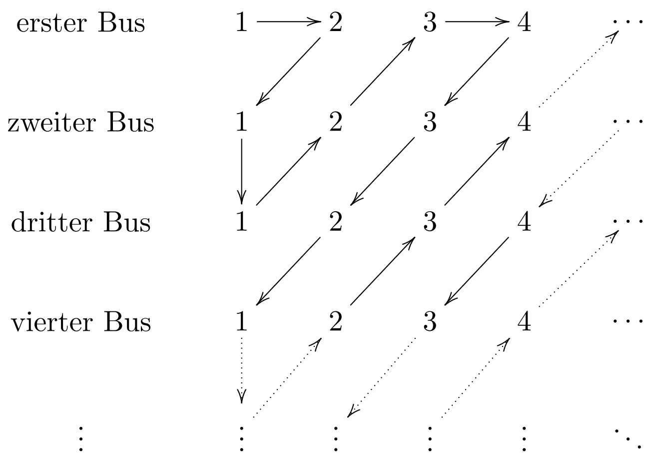
(c) Man bittet jeden Gast in das Zimmer zu ziehen, das die doppelte Zimmernummer trägt. Also der Gast aus Zimmer n wird in das Zimmer mit der Nummer $2n$ geschickt. Nach dem Umzug stehen alle Zimmer mit ungeraden Nummern leer. Wir verteilen die Personen aus dem Bus auf die Zimmer mit ungeraden Zimmernummern. Dabei schicken wir die m-te Person aus dem Bus auf das Zimmer mit der Nummer $2m-1$. Wir zeigen noch die Injektivität der Abbildungen $n \mapsto 2n$ und $m \mapsto 2m-1$. Wäre $2n = 2k$, so kann man diese beiden Zahlen auch als Elemente in $\mathbb{Q}$ auffassen und analog der obigen Argumentation beide Seiten durch 2 dividieren. Man erhält dann $n = k$, wie gewünscht. Wäre $2m-1 = 2l-1$, so addiert man 1 auf beiden Seiten und dividiert dann durch 2. So erhält man ebenfalls $m = l$.

(d) Die meisten formalen Lösungen benutzen hier (implizit) gewisse arithmetische Argumente, wie zum Beispiel die Existenz unendlich vieler Primzahlen, Euklids Lemma oder die eindeutige Primfaktorzerlegung. Die Lösung hier ist nicht perfekt ausformalisiert, aber kommt dafür ohne die arithmetische Struktur der ganzen Zahlen aus.
Zuerst schickt man alle Hotelgäste analog zu oben jeweils in das Zimmer mit der doppelten Zimmernummer. Danach sind alle Zimmer mit geraden Nummern vergeben. Übrig sind noch alle ungeraden Zimmernummern, die jetzt auf die ankommenden Gäste verteilt werden. Dazu werden die neuen Gäste in einer gewissen Reihenfolge mit allen ungeraden Zahlen durchnummeriert. Wichtig ist dabei, dass dies in einer geeigneten Reihenfolge geschieht. Nämlich so, dass früher oder später jeder Gast eine Nummer zugewießen bekommt. Dazu ordnet man die Personen aus den Bussen nach folgendem

Schema an.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{erster Bus} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\[2em]
\text{zweiter Bus} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\[2em]
\text{dritter Bus} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\[2em]
\text{vierter Bus} & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\[2em]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Man muss in diesem Schema nur noch die Zimmernummern verteilen, und zwar so, dass jeder Gast genau eine Zimmernummer erhält. Mit anderen Worten, man muss die Gäste in diesem Schema so durchzählen, dass jeder Gast genau einmal dabei vorkommt. Dies funktioniert nach folgendem Muster.



Auf diese Weise bekommt jeder der wartenden Gäste früher oder später eine Zimmernummer zugeteilt.