Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 10
27.01.2010

Lineare Algebra I

Lösung 10.1:

Voraussetzung: Sei K ein Körper.

(a) Behauptung: Die Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ, also ist $K^{n\times n}$ zusammen mit der Matrizenaddition und dem Matrizenprodukt kein kommutativer Ring.
Beweis: Es ist z.B. über jedem Körper K

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Sei $K = \mathbb{F}_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sei $K = \mathbb{F}_5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Voraussetzung: Seien $A, B \in K^{n\times n}$ schwache magische Quadrate (vgl. Aufgabe 9.12).
Behauptung: Dann ist auch AB ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen–/Spaltensumme $s(AB) = s(A)s(B)$.
Beweis: Seien $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Dann ist

$$AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{1\le i,j\le n} =: (c_{ij})_{1\le i,j\le n}.$$

Betrachten wir zuerst die Zeilensummen von AB. Sei $i \in \{1,\dots,n\}$.

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{kj}}_{=s(B)} = (\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}}_{=s(A)})s(B) = s(A)s(B).$$

Nun betrachten wir die Spaltensummen von AB. Sei dafür $j \in \{1,\dots,n\}$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ik}}_{=s(A)} = (\underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_{kj}}_{=s(B)})s(A) = s(A)s(B).$$

Aufgabe 10.2:

Voraussetzung: Sei K ein Körper. Für $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ heißt $A^{\mathrm{T}} := (a_{ji})_{1\le i,j\le n}$ die zu A **transponierte Matrix**. Seien nun $A, B \in K^{n\times n}$.

(a) Behauptung: $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.
Beweis: Seien $a'_{ij} := a_{ji}$ und $b'_{ij} := b_{ji}$ für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann ist $A^{\mathrm{T}} = (a'_{ij})_{1\le i,j\le n}$ und $B^{\mathrm{T}} = (b'_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Weiter gilt

$$(AB)^{\mathrm{T}} = (\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki})_{1\le i,j\le n} = (\sum_{k=1}^{n} b'_{ik}a'_{ki})_{1\le i,j\le n} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

(b) Behauptung: Ist A invertierbar, so auch A^{T}, und es gilt $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.
Beweis: Sei A invertierbar mit Inversem A^{-1}. Dann ist nach Teilaufgabe (a) $(A^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{-1})^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$ und $A^{\mathrm{T}}(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1}A)^{\mathrm{T}} = I_n^{\mathrm{T}} = I_n$.

(c) Behauptung: Ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ invertierbar und gilt $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$, so ist $A' := (a_{ij}^2)_{1\le i,j\le n}$ ein schwaches magisches Quadrat mit Zeilen–/Spaltensumme $s(A') = 1$ (vgl. Aufgabe 9.12).
Beweis: Sei A invertierbar mit Inversem A^{T}. Dann bedeutet $AA^{\mathrm{T}} = I_n$ u.a., dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2$$

gilt. D.h. die Zeilensummen von A' sind alle 1. Außerdem bedeutet $A^{\mathrm{T}}A = I_n$ u.a., dass für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$1 = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^2$$

gilt. Also sind auch alle Spaltensummen von A' gleich 1.

Lösung 10.3:

Wir berechnen die Lösung durch Umformung der erweiterten Matrix auf Zeilenstufenform.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & -2 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & -3 & 5 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - 3z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 8z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - 2z_1 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - 6z_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & 6 & -2 & 22 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 16 \end{array}\right) \quad \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 - 2z_2 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_2 \\ z_5 & \leftarrow & z_5 - z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

Man erkennt, dass dieses System keine Lösung über $\mathbb{Q}$ besitzt. Alle Rechenschritte, die bis jetzt durchgeführt wurden, sind auch über dem Körper $\mathbb{F}_5$ durchführbar. Um also die

Lösung in $\mathbb{F}_5$ zu bestimmen rechnen wir einfach weiter. Das System geht dann über in

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nachdem wir die reduzierte Zeilenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hergestellt haben können wir die Lösung ablesen. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{F}_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 10.4:

Voraussetzung: Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Behauptung: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(v_i) = w_i$ für $i \in \{1,2,3,4\}$.

Beweis: Wir wissen, dass eine lineare Abbildung $f\colon V \longrightarrow W$ durch die Bilder von f auf einer Basis von V schon auf ganz V festgelegt ist. Umgekehrt kann man die Bilder auf einer Basis von V beliebig vorgeben und erhält durch lineare Erweiterung eine lineare Abbildung (vgl. Aufgabe 9.5 (e)). Daher genügt es zu zeigen, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Man prüft auf lineare Abhängigkeit indem man das homogene System

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

löst. Dieses lässt sich auf Diagonalgestalt bringen mit Diagonaleinträgen ungleich 0, daher ist (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig und somit aus Dimensionsgründen eine Basis. Insbesondere existiert genau eine lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1,2,3,4$.

Behauptung: f ist nicht injektiv aber surjektiv.

Beweis: Sicherlich ist f surjektiv, denn schon $\{w_2, w_3\}$ erzeugen $\mathbb{R}^2$. Die Abbildung ist nicht injektiv, denn es ist $f(v_1 - v_2 + v_3) = 0$, damit ist $\ker f \neq (0)$.

Somit liegt auch das Element

$$z = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

im Bild von f. Wir bestimmen nun alle Urbilder von z. Dafür betrachten wir die Abbildungsmatrix bezüglich (v_1, v_2, v_3, v_4) und der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ und lösen das inhomogene System:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 5 \end{array}\right) \qquad z_2 \leftarrow z_2 + z_1 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 8 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{ccc} z_1 & \leftarrow & z_1 - z_2 \\ z_2 & \leftarrow & \frac{1}{2} z_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Damit kann man alle Urbilder beschreiben durch

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Lösung 10.5:

Wir betrachten den $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}[X]_3$. Seien $\underline{v} = (1, X, X^2, X^3)$ und $\underline{w} = (1, X-1, X^2-2X+1, -X^3+3X^2-3X+1)$. Wir definieren

$$f\colon \mathbb{R}[X]_3 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_3,$$
$$\sum_{i=0}^{3} a_i X^i \longmapsto \sum_{i=0}^{3} a_i (2X-1)^i \quad (a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}).$$

(a) Behauptung: f ist eine lineare Abbildung.
Beweis: Seien $p = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i, q = \sum_{j=0} b_j X^j \in \mathbb{R}[X]_3, \lambda \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\begin{aligned} f(p+q) &= f\left(\sum_{i=0}^{3} (a_i + b_i) X^i\right) = \sum_{i=0}^{3} (a_i + b_i)(2X-1)^i \\ &= \sum_{i=0}^{3} a_i (2X-1)^i + \sum_{i=0}^{3} b_i (2X-1)^i = f(p) + f(q), \end{aligned}$$

sowie

$$f(\lambda p) = f\left(\sum_{i=0} \lambda a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{3} \lambda a_i (2X-1)^i = \lambda \sum_{i=0}^{3} a_i (2X-1)^i = \lambda f(p).$$

Dies zeigt, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Behauptung: $\underline{v}$ und $\underline{w}$ sind Basen von $\mathbb{R}[X]_3$.
Beweis: Sicherlich erzeugt $\underline{v}$ den $\mathbb{R}[X]_3$ und nach Definition ist $\underline{v}$ auch linear unabhängig. Da $\underline{w}$ vier Elemente hat genügt es aus Dimensionsgründen, zu zeigen, dass $\underline{w}$ linear unabhängig ist. Angenommen es gibt $\lambda_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, 3$ mit

$$\lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X^2+2X+1) + \lambda_3(-X^3+3X^2-3X+1) = 0.$$

Da X^3 nur im letzten Summand auftaucht, muss $\lambda_3 = 0$ sein. Analog argumentiert man nacheinander mit λ_2 und X^2, dann mit λ_1 und X. Man erhält schließlich, dass $\lambda_i = 0$ ist für $i = 0, 1, 2, 3$. Also ist $\underline{w}$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]_3$.

(c) Wir berechnen die Bilder von $\underline{v}$ unter der Abbildung f und erhalten

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 \\ f(X) &= 2X-1 \\ f(X^2) &= (2X-1)^2 = 4X^2-4X+1 \\ f(X^3) &= (2X-1)^3 = 8X^3-12X^2+6X-1. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$M(f,\underline{v},\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(d) Zuerst bestimmen wir $M(\mathrm{id},\underline{w},\underline{v})$. Dazu müssen wir die Basisvektoren von $\underline{w}$ als Linearkombinationen der Elemente aus $\underline{v}$ schreiben. Dies aber schon geschehen und wir können die Matrix sofort hinschreiben. Es ist

$$M(\mathrm{id},\underline{w},\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Um $M(\mathrm{id},\underline{v},\underline{w})$ zu bestimmmen müssen wir umgekehrt die Elemente von $\underline{v}$ durch Linearkombinationen der Elemente von $\underline{w}$ ausdrücken. Alternativ könnte man auch die Inverse der Matrix $M(\mathrm{id},\underline{w},\underline{v})$ berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ X &= (X-1)+1 \\ X^2 &= (X^2-2X+1)+2(X-1)+1 \\ X^3 &= -(-X^3+3X^2-3X+1)+3(X^2-2X+1)+3(X-1)+1. \end{aligned}$$

Also ist

$$M(\mathrm{id},\underline{v},\underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) Es ist

$$M(f,\underline{w},\underline{w}) = M(\mathrm{id},\underline{v},\underline{w}) \cdot M(f,\underline{v},\underline{v}) \cdot M(\mathrm{id},\underline{w},\underline{v}).$$

Man rechnet also

$$
\begin{aligned}
M(f,\underline{w},\underline{w}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Um die Matrix $M(f,\underline{w},\underline{w})$ direkt zu bestimmen, schreiben wir die Bilder von $\underline{w}$ unter f als Linearkombinationen der Basis $\underline{w}$. Es ist

$$
\begin{array}{lll}
f(1) & = 1 & = 1 \\
f(X-1) & = 2X-2 & = 2(X-1) \\
f(X^2-2X+1) & = 4X^2-8X+4 & = 4(X^2-2X+1) \\
f(-X^3+3X^2-3X+1) & = -8X^3+24X^2-24X+8 & = 8(-X^3+3X^2-3X+1).
\end{array}
$$

Also ergibt sich auch hier

$$
M(f,\underline{w},\underline{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.
$$

(f) Um ein Urbild von $p := f(q) = -X^3 + 40X^2 - 12X + 9$ zu finden, lösen wir das zugehörige inhomogene System, das durch eine der Darstellungsmatrizen gegeben ist. Dabei muss man jedoch immer auf die Basiswahl achten. Möchte man mit $M(f,\underline{w},\underline{w})$ arbeiten, so muss man zuerst die Koeffizienten von p bezüglich der Basis $\underline{w}$ bestimmen und die Lösung des Systems sind erneut Koeffizienten bezüglich der Basis $\underline{w}$. Analoges gilt für die Basis $\underline{v}$. Wir entscheiden uns, das System bezüglich $\underline{w}$ zu lösen. Dazu müssen wir zuerst die Koeffizienten von p bezüglich $\underline{w}$ bestimmen. Dies ist wegen der "Stufenform" von $\underline{w}$ relativ einfach. Wir erhalten

$$
p = 8(-X^3+3X^2-3X+1) + 16(X^2-2X+1) + 44(X-1) + 29
$$

Daher lösen wir das inhomogene System

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)
$$

Wir erhalten die Lösung $(29, 22, 4, 1)$ als Koeffizienten bezüglich $\underline{w}$. Damit ist die Lösung

$$
q = 29 + 22(X-1) + 4(X^2-2X+1) + (-X^3+3X^2-3X+1) = -X^3+7X^2+11X+12.
$$