Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Markus Schweighofer
Aaron Kunert / Sven Wagner

Wintersemester 2009/2010
Lösungsblatt 9
20.01.2010

Lineare Algebra I

Lösung 9.1:

Voraussetzung: Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$, und sei V ein K–Vektorraum.

Behauptung: Sind $u, v, w \in V$ linear unabhängig, so auch $u + v, u + w, v + w$.

Beweis: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha(u + v) + \beta(u + w) + \gamma(v + w) = 0$. Das heißt

$$(\alpha + \beta)u + (\alpha + \gamma)v + (\beta + \gamma)w = 0.$$

Da u, v, w linear unabhängig sind, gilt somit $\alpha + \beta = \alpha + \gamma = \beta + \gamma = 0$. Insbesondere gilt damit (additiv kürzen) $\alpha = \beta = \gamma$. Wegen $(1 + 1)\alpha = \alpha + \alpha = \alpha + \beta = 0$, folgt, wegen $1 + 1 \neq 0$, dass (multiplikativ kürzen) $\alpha = 0$ ist. Somit sind auch β und γ schon 0.
Wir haben also gezeigt, dass $u + v, u + w, v + w$ linear unabhängig sind.

Lösung 9.2:

Da wir stets Untermengen von Vektorräumen betrachten, überprüfen wir jeweils, ob die angegebenen Mengen abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation sind.

(a) Aus der Vorlesung wissen wir, dass Lösungsmengen von homogenen linearen Gleichungssystemen in n Variablen über einem Körper K Universen von Untervektorräumen des K^n sind. Somit ist die hier gegebene Menge Universum eines Untervektorraums des K^5. Man kann dies aber auch folgendermaßen sehen:
Seien $x := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), y := (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \in K^5$ und gelte $x_1 - x_2 = x_3 + x_4 + x_5$, sowie $y_1 - y_2 = y_3 + y_4 + y_5$. Wir betrachten nun die Summe $x + y$. Es ist $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (x_3 + x_4 + x_5) + (y_3 + y_4 + y_5) = x_3 + y_3 + x_4 + y_4 + x_5 + y_5$. Also erfüllt auch $x + y$ die definierende Eigenschaft. Sei $\lambda \in K$. Wir betrachten λx. Es ist $\lambda x_1 - \lambda x_2 = \lambda(x_1 - x_2) = \lambda(x_3 + x_4 + x_5) = \lambda x_3 + \lambda x_4 + \lambda x_5$. Daher ist die betrachtete Menge abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation und somit ein Universum eines Untervektorraums des K^5.

(b) Sei $f \in K[X]$. Im Allgemeinen ist $M := \{x \in K \mid f(x) = 0\}$ kein Universum eines Untervektorraums von K. Die einzigen Universen von Untervektorräumen von K sind K selbst und die Menge $\{0\}$. Also ist M nur ein Universum eines Untervektorraums für $f = 0$ oder wenn f genau die 0 als Nullstelle hat, z.B. $f = X$. Je nach Körper gibt es auch weitere Polynome, die nur 0 als Nullstelle haben, so zum Beispiel $f = X(X^2 + 1)$ in $K = \mathbb{Q}$.

(c) Sei $x \in K$ und $M := \{f \in K[X] \mid f(x) = 0\}$. Seien $g, h \in M$. So gilt $(g+h)(x) = g(x) + h(x) = 0+0 = 0$, daher ist auch $g+h \in M$. Ist $\lambda \in K$, so ist $(\lambda g)(x) = \lambda g(x) = \lambda 0 = 0$, und daher ist auch $(\lambda g) \in M$. Also ist M abgeschlossen unter Skalarmultiplikation und Addition und damit ein Universum eines Untervektorraums von $K[X]$.

Lösung 9.3:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, und seien V und W zwei K–Vektorräume.

(a) Behauptung: Sind U_1 und U_2 Untervektorräume von V, so ist $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.
Beweis: Wir zeigen beide Richtungen.
"$\Leftarrow$":
Gelte $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$. Im ersten Fall ist $U_1 \cup U_2 = U_2$, im zweiten Fall ist $U_1 \cup U_2 = U_1$. Da wir schon wissen, dass U_1 und U_2 Untervektorräume sind, ist in beiden Fällen $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V.
"$\Rightarrow$":
Sei $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum von V. Angenommen es ist weder $U_1 \cup U_2 \subseteq U_1$ noch $U_1 \cup U_2 \subseteq U_2$ Dann gibt es zwei Vektoren $u_1, u_2 \in V$ mit $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ und $u_2 \in U_2 \setminus U_1$. Nach Voraussetzung ist $v = u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$. Also liegt v in U_1 oder in U_2. Angenommen es liege in U_1, so wäre $u_2 = u_1 - v \in U_1$, was wir ausgeschlossen hatten. Also muss $v \in U_2$ sein, dann aber wäre $u_1 = v - u_2 \in U_2$, was ebenfalls nicht möglich ist. Daher war obige Annahme falsch und einer der Räume ist im anderen enthalten.

(b) Behauptung: Ist $f\colon V \to W$ eine K–lineare Abbildung, so ist $\ker f$ ein Untervektorraum von V und $\operatorname{im} f$ ein Untervektorraum von W. (Hier war ein Fehler in der Aufgabe. $\operatorname{im} f$ ist natürlich i.A. kein Untervektorraum von V.)
Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $\ker f$ unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist. Seien $x, y \in \ker f$. Es ist $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$, daher folgt $x+y \in \ker f$. Sei $\lambda \in K$, so ist $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda 0 = 0$. Daher ist auch $\lambda x \in \ker f$ und $\ker f$ ist ein Untervektorraum von V. Nun betrachten wir $\operatorname{im}(f)$. Seien $a, b \in \operatorname{im}(f)$. Dann gibt es $x, y \in V$ mit $f(x) = a$ und $f(y) = b$. Es folgt $f(x+y) = a + b \in \operatorname{im}(f)$ und $f(\lambda x) = \lambda a \in \operatorname{im}(f)$. Also ist auch $\operatorname{im}(f)$ abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation.

Lösung 9.4:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, \dots, a_n \in K$, wobei nicht alle dieser Elemente die 0 sind.

Behauptung:

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

ist ein Untervektorraum der Dimension $n-1$ des K–Vektorraumes K^n.

Beweis: H ist genau die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Insbesondere ist H ein Untervektorraum des K^n. Da nicht alle Einträge dieser Matrix 0 sind, ist sie in Stufenform mit einer Stufe. Laut Vorlesung hat ihr Kern, also H, dann die Dimension $n-1$.

Lösung 9.5:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, und seien V und W zwei K–Vektorräume. Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Behauptung: Ist B eine Basis von V und C eine Basis von W, so ist $(B\times\{0\})\cup(\{0\}\times C)$ eine Basis von $V \times W$.
Beweis: Wir zeigen zuerst, dass $(B\times\{0\})\cup(\{0\}\times C)$ ein Erzeugendensystem von $V\times W$ ist. Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $b_1, \dots, b_n \in B$, $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ und $c_1, \dots, c_m \in C$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \quad \text{und} \quad w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j c_j.$$

Damit ist aber nach der Definition der K–Vektorraumstruktur auf $V\times W$ (vgl. Aufgabe 8.1)

$$(v, w) = (v, 0) + (0, w) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, 0) + (0, \sum_{j=1}^{m} \mu_j c_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i, 0) \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0, c_j).$$

Also gilt $(v, w) \in \operatorname{span}((B \times \{0\}) \cup (\{0\} \times C))$.
Nun müssen wir noch zeigen, dass $(B \times \{0\}) \cup (\{0\} \times C)$ linear unabhängig ist. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $b_1, \dots, b_n \in B$, $\mu_1, \dots, \mu_m \in K$ und $c_1, \dots, c_m \in C$ mit

$$(0, 0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (b_i, 0) \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0, c_j) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, 0) + (0, \sum_{j=1}^{m} \mu_j c_j) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j c_j).$$

Dies impliziert $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0$ und $\sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j c_j = 0$. Da aber B in V und C in W linear unabhängig sind, folgt daraus $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots \mu_m = 0$.

(b) Behauptung: Sind V und W endlich–dimensional, so auch $V \times W$ und es gilt

$$\dim\,(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Beweis: Da die Dimension eines Vektorraums die Mächtigkeit einer beliebigen Basis dieses Vektorraums ist, folgt die Behauptung aus Teilaufgabe (a).

(c) Behauptung: Sind $v_1, \dots, v_r \in V$ linear abhängig, so auch $f(v_1), \dots, f(v_r)$.
Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i$, so gilt wegen der Linearität von f

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i) = f(0) = 0.$$

Also sind die Vektoren $f(v_1), \dots, f(v_r)$ ebenfalls linear abhängig.

(d) Behauptung: Ist f injektiv und sind $v_1, \dots, v_r \in V$ linear unabhängig, so sind auch $f(v_1), \dots, f(v_r)$ linear unabhängig.
Beweis: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i).$$

Da f injektiv ist, folgt $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i v_i = 0$. Wegen der Linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1, \dots, v_r$, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$.

(e) Behauptung: Ist V endlich–dimensional, sind $v_1, \ldots, v_r \in V$ linear unabhängig und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $g\colon V \to W$, die für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ den Vektor v_i auf den Vektor w_i abbildet.
Beweis: Laut Vorlesung ist kann man jede linear unabhängige Teilmenge von V zu einer Basis ergänzen. Da V eindlich–dimensional ist, gibt es also ein $n \in \mathbb{N}_0$ und $v_{r+1}, \ldots, v_n \in V$, so dass $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V bilden. Definiere nun $g(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) := \sum_{i=1}^{r} \lambda_i w_i$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Da $v_1, \ldots, v_n$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V bilden, besitzt jedes Element von V genau eine Darstellung in der Form $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Somit ist g eine lineare Abbildung von V nach W, die für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ den Vektor v_i auf den Vektor w_i abbildet.

(f) Behauptung: Ist V endlich–dimensional, so auch $\operatorname{im} f$.
Beweis: Offensichtlich bilden die Bilder einer beliebigen Basis von V ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im} f$.

(g) Behauptung: Ist V endlich–dimensional, bilden $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\ker f$ und bilden $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von $\operatorname{im} f$, und ist für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $u_j \in f^{-1}(\{w_j\})$ gegeben, so ist $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von V.
Beweis: Wir zeigen zunächst, dass $(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m)$ ein Erzeugendensystem von V ist. Sei $v \in V$. Gilt $f(v) = 0$, so ist $v \in \ker f = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Ist $f(v) \neq 0$, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ mit $f(v) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j w_j$. Sei $u := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j$. Dann ist $f(u) = f(v)$, d.h. $f(v - u) = 0$. Also ist $v - u \in \ker f = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n)$. Insgesamt folgt $v = (v - u) + u \in \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m)$.
Es bleibt zu zeigen, dass $v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängig sind. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_m \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j = 0.$$

Dann ist, wegen $v_1, \ldots, v_n \in \ker f$ und $f(u_j) = w_j$ $(1 \leq j \leq m)$,

$$0 = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \mu_j u_j) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j.$$

Da $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig sind, folgt $\mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$. Somit haben wir aber

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0,$$

und daraus folgt, wegen der Linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$, dass auch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gilt.

(h) Behauptung: Es gilt, wenn $\dim V < \infty$: $\dim V = (\dim \ker f) + (\dim \operatorname{im} f)$.
Beweis: Das folgt direkt aus Teilaufgabe (g).

(i) Behauptung: Ist $\dim V < \infty$, so gilt $V \cong (\ker f) \times (\operatorname{im} f)$.
Beweis: Aus den Teilaufgaben (b) und (h) folgt, dass $\dim V = \dim (\ker f) \times (\operatorname{im} f)$ ist. Laut Vorlesung sind aber zwei endlichdimensionale K–Vektorräume, die dieselbe Dimension haben, stets isomorph.

Lösung 9.6:

Voraussetzung: Sei K ein Körper, und sei $d \in \mathbb{N}_0$.

(a) Der Raum $K[X]_d$ wird erzeugt von der Menge $\{1, X, X^2, \ldots, X^d\}$. Nach Definition des Polynomrings ist diese Menge linear unabhängig. Also ist $\underline{v} = (1, X, X^2, \ldots, X^d)$ eine Basis von $K[X]_d$ und es ergibt sich $\dim K[X]_d = d + 1$.

(b) Wir wählen als Basis $\underline{v} = (1, X, X^2, X^3, X^4, X^5, X^6)$. Um die Matrix $M(D, \underline{v}, \underline{v})$ zu bestimmen, berechnen wir D für jedes Basiselement und drücken das Ergebnis bezüglich der Basis $\underline{v}$ aus. Es ist

$$\begin{aligned} D(1) &= 0 \\ D(X) &= 1 \\ D(X^2) &= 2X \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

und wir erhalten damit die Matrix

$$M(D, \underline{v}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Um den Kern von D zu bestimmen, berechnen wir das homogene Gleichungssystem, das durch obige Matrix gegeben ist. Dieses ist schon fast auf reduzierter Zeilenstufenform und wir erkennen, dass der Kern dieser Matrix von dem Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Auf die Basis $\underline{v}$ zurückübersetzt heißt das:

$$\ker D = \{\lambda \cdot 1 \mid \lambda \in \mathbb{Q}\}.$$

Lösung 9.7:

Voraussetzung: Sei $W := \mathbb{F}_5[X]_4$.

(a) Behauptung: $\underline{v} = (X + 1, X^4, X^3 - X^2, X^2 - 1, X - 1)$ und $\underline{w} = (2X^3 + X^2, X^2 + X, X^3 - 3X^2, X^4 + X^2, X^2 - 1)$ sind geordnete Basen von W.
Beweis: Da die Dimension von W mit der Anzahl der Elemente in $\underline{v}$ und $\underline{w}$ übereinstimmt,

genügt es zu zeigen, dass $\underline{v}, \underline{w}$ linear unabhängig sind. Wir beginnen mit $\underline{v}$. Sei für $\lambda_i \in K$.

$$\lambda_1(X+1) + \lambda_2 X^4 + \lambda_3(X^3 - X^2) + \lambda_4(X^2 - 1) + \lambda_5(X - 1) = 0.$$

Nach Umsortierung erhalten wir

$$\lambda_2 X^4 + \lambda_3 X^3 + (\lambda_4 - \lambda_3)X^2 + (\lambda_5 + \lambda_1)X + (\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5) = 0.$$

Unmittelbar einsichtig ist $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Es bleiben die Gleichungen $\lambda_1 + \lambda_5 = 0$ und $\lambda_1 - \lambda_5 = 0$, woraus $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$ folgt. Analog argumentiert man bei $\underline{w}$:
Sei

$$\lambda_1(2X^3 + X^2) + \lambda_2(X^2 + X) + \lambda_3(X^3 - 3X^2) + \lambda_4(X^4 + X^2) + \lambda_5(X^2 - 1) = 0.$$

Man erhält

$$\lambda_4 X^4 + (2\lambda_1 + \lambda_3)X^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)X^2 + \lambda_2 X - \lambda_5 = 0.$$

Unmittelbar erkennt man $\lambda_5 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Es bleiben die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

deren einzige Lösung gerade $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ ist.

(b) Oft kann man die Darstellungen direkt ablesen, ansonsten muss man ein kleines lineares Gleichungssystem nach den Koeffizienten der Darstellung lösen. Es ist

$$\begin{array}{lclllll}
X+1 & = & 0(2X^3+X^2) & +1(X^2+X) & +0(X^3-3X^2) & +0(X^4+X^2) & +4(X^2-1) \\
X^4 & = & 2(2X^3+X^2) & +0(X^2+X) & +1(X^3-3X^2) & +1(X^4+X^2) & +0(X^2-1) \\
X^3-X^2 & = & 1(2X^3+X^2) & +0(X^2+X) & +4(X^3-3X^2) & +0(X^4+X^2) & +0(X^2-1) \\
X^2-1 & = & 0(2X^3+X^2) & +0(X^2+X) & +0(X^3-3X^2) & +0(X^4+X^2) & +1(X^2-1) \\
X-1 & = & 4(2X^3+X^2) & +1(X^2+X) & +2(X^3-3X^2) & +0(X^4+X^2) & +1(X^2-1)
\end{array}$$

und umgekehrt

$$\begin{array}{lclllll}
2X^3+X^2 & = & 4(X+1) & +0X^4 & +2(X^3-X^2) & +3(X^2-1) & +1(X-1) \\
X^2+X & = & 1(X+1) & +0X^4 & +0(X^3-X^2) & +1(X^2-1) & +0(X-1) \\
X^3-3X^2 & = & 4(X+1) & +0X^4 & +1(X^3-X^2) & +3(X^2-1) & +1(X-1) \\
X^4+X^2 & = & 3(X+1) & +1X^4 & +0(X^3-X^2) & +1(X^2-1) & +2(X-1) \\
X^2-1 & = & 0(X+1) & +0X^4 & +0(X^3-X^2) & +1(X^2-1) & +0(X-1)
\end{array}$$

(c) Seien $p, q \in W$ und $\lambda \in \mathbb{F}_5$. Zuerst muss man sich überlegen, dass F tatsächlich eine Abbildung ist, denn ist $\deg p = 4$, so ist $(X+1)p \notin W$, da $(X+1)p$ den Grad 5 hat. Allerdings reduziert D den Grad um 1, so dass gilt $\deg p = \deg D((X+1)p)$. Also liegt das Bild tatsächlich in W. Die Abbildung F ist eine Verkettung von $D\colon \mathbb{F}_5[X]_5 \longrightarrow \mathbb{F}_5[X]_4$ und der Abbildung

$$\begin{aligned} \mu\colon \mathbb{F}_5[X]_4 &\longrightarrow \mathbb{F}_5[X]_5, \\ p &\longmapsto (X+1)p. \end{aligned}$$

Es ist schon bekannt, dass D ein Vektorraumhomomorphismus ist. Weiter ist bekannt, dass die Verkettung von Homomorphismen wieder ein solcher ist. Also genügt es, zu zeigen, dass μ eine lineare Abbildung ist. Es ist $\mu(p+q) = (X+1)(p+q) = (X+1)p+(X+1)q = \mu(p)+\mu(q)$ und weiter $\mu(\lambda p) = (X+1)\lambda p = \lambda(X+1)p = \lambda\mu(p)$. Damit ist gezeigt, dass auch F eine lineare Abbildung ist.

Nun berechnen wir $M(F, \underline{w}, \underline{v})$ (leider war die Aufgabe nicht klar gestellt, man hätte auch $M(F, \underline{v}, \underline{w})$ ausrechnen können). Dafür berechnen wir $F(w)$ für alle $w \in \underline{w}$ und drücken die Ergebnisse als Linearkombination bezüglich $\underline{v}$ aus. Es ist

$$\begin{aligned} F(2X^3 + X^2) &= D((X+1)(2X^3 + X^2)) \\ &= D(2X^4 + 3X^3 + X^2) \\ &= 3X^3 + 4X^2 + 2X \\ &= 3(X^3 - X^2) + 2(X^2 - 1) + 2(X+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X^2 + X) &= D((X+1)(X^2 + X)) \\ &= D(X^3 + 2X^2 + X) \\ &= 3X^2 + 4X + 1 \\ &= 3(X^2 - 1) + 4(X+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X^3 - 3X^2) &= D((X+1)(X^3 - 3X^2)) \\ &= D(X^4 - 2X^3 - 3X^2) \\ &= 4X^3 + 4X^2 + 4X \\ &= 4(X^3 - X^2) + 3(X^2 - 1) + (X+1) + 3(X-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X^4 + X^2) &= D((X+1)(X^4 + X^2)) \\ &= D(X^5 + X^4 + X^3 + X^2) \\ &= 4X^3 + 3X^2 + 2X \\ &= 4(X^3 - X^2) + 2(X^2 - 1) + 2(X+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(X^2 - 1) &= D((X+1)(X^2 - 1)) \\ &= D(X^3 + X^2 - X - 1) \\ &= 3X^2 + 2X + 4 \\ &= 3(X^2 - 1) + 2(X+1) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Matrix $M(F, \underline{w}, \underline{v})$ zu

$$M(F, \underline{w}, \underline{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog berechnet man

$$M(F,\underline{v},\underline{w}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um $\ker F$ zu bestimmen, stellen wir zwei mögliche Wege vor. Eine Möglichkeit ist das homogene lineare Gleichungssystem, das durch eine der Abbildungsmatrizen gegeben ist, zu lösen. Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 + z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - z_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_4 \leftarrow z_4 - z_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad z_5 \leftarrow z_5 + z_4 \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Zeilen} \\ \text{vertauschen} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 - z_4 \\ z_2 & \leftarrow & z_2 + z_4 \\ z_1 & \leftarrow & z_1 + 2z_4 \\ z_4 & \leftarrow & 4z_4 \\ z_3 & \leftarrow & 3z_3 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{lcl} z_1 & \leftarrow & z_1 + 4z_3 \\ z_1 & \leftarrow & z_1 + 4z_2 \\ z_2 & \leftarrow & 4z_2 \\ z_1 & \leftarrow & 3z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit können wir den Kern als Koeffizientenvektor bezüglich der Basis $\underline{w}$ ablesen. Es ist

$$\begin{aligned} \ker f &= \left\{\lambda\big(2(2X^3 + X^2) + 4(X^2 + X) + (X^4 + X^2) - (X^2 - 1)\big) \mid \lambda \in \mathbb{F}_5\right\} \\ &= \left\{\lambda(X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X - 1) \mid \lambda \in \mathbb{F}_5\right\}. \end{aligned}$$

Der andere Weg bestimmt den Kern direkt. Wir betrachten zuerst den Kern von $D\colon \mathbb{F}_5[X]_5 \longrightarrow \mathbb{F}_5[X]_4$ und erkennen, dass dieser nicht nur von 1, sondern auch von X^5 aufgespannt wird. Nun muss man sich überlegen, welche Elemente der Form $\alpha X^5 + \beta 1$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_5$ im Bild von μ liegen. Im Bild von μ zu liegen, bedeutet insbesondere durch $(X + 1)$ teilbar zu sein, oder anders gesagt -1 als Nullstelle zu haben. Wir erkennen, dass unter dieser Bedingung, für ein gegebenes α sofort $\beta = \alpha$ folgt. Also suchen wir Urbilder unter μ von Polynomen der Form $\alpha(X^5+1)$. Wir erhalten diese durch Polynomdivision. Es ist für alle $\alpha \in \mathbb{F}_5$

$$\begin{aligned} \alpha(X^5+1) \text{ div } (X+1) &= \alpha((X^5+1) \text{ div } (X+1)) = \alpha(X^4 - X^3 + X^2 - X + 1) \\ &= \alpha(X^4 + 4X^3 + X^2 + 4X + 1). \end{aligned}$$

(d) In $\mathbb{F}_2[X]_4$ ist $X+1 = X-1$ und damit ist $\underline{v}$ linear abhängig.

Lösung 9.8:

Behauptung: Die Dimensionen des Zeilenraumes und des Spaltenraums der angegebenen Matrix sind beide 3.

Beweis: Laut Vorlesung ändert sich der Zeilenraum nicht, wenn wir die Matrix auf (reduzierte) Zeilenstufenform bringen.

$$\begin{pmatrix} 4+\mathring{\imath} & -1+4\mathring{\imath} & 20+5\mathring{\imath} & 7+23\mathring{\imath} \\ 1 & \mathring{\imath} & 3 & 1+3\mathring{\imath} \\ -1+\mathring{\imath} & -1-\mathring{\imath} & -5+7\mathring{\imath} & -10 \\ \mathring{\imath} & -1 & 1+6\mathring{\imath} & -4+5\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ z_1 \leftarrow (-\mathring{\imath})z_4 \\ z_4 \leftarrow z_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & 6-\mathring{\imath} & 5+4\mathring{\imath} \\ 1 & \mathring{\imath} & 3 & 1+3\mathring{\imath} \\ -1+\mathring{\imath} & -1-\mathring{\imath} & -5+7\mathring{\imath} & -10 \\ 4+\mathring{\imath} & -1+4\mathring{\imath} & 20+5\mathring{\imath} & 7+23\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_2 \leftarrow z_2 - z_1 \\ z_3 \leftarrow z_3 - (-1+\mathring{\imath})z_1 \\ z_4 \leftarrow z_4 - (4+\mathring{\imath})z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & 6-\mathring{\imath} & 5+4\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & -3+\mathring{\imath} & -4-\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & -5+3\mathring{\imath} & -9+2\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_1 \leftarrow z_1 - \frac{5+4\mathring{\imath}}{1+\mathring{\imath}} z_3 \\ z_2 \leftarrow z_2 - \frac{-4-\mathring{\imath}}{1+\mathring{\imath}} z_3 \\ z_3 \leftarrow (1+\mathring{\imath})^{-1} z_3 \\ z_4 \leftarrow z_4 - \frac{-9+2\mathring{\imath}}{1+\mathring{\imath}} z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & 6-\mathring{\imath} & 0 \\ 0 & 0 & -3+\mathring{\imath} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5+3\mathring{\imath} & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} z_1 \leftarrow z_1 - \frac{6-\mathring{\imath}}{-3+\mathring{\imath}} z_2 \\ z_2 \leftarrow (-3+\mathring{\imath})^{-1} z_2 \\ z_4 \leftarrow z_4 - \frac{-5+3\mathring{\imath}}{-3+\mathring{\imath}} z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Dimension des Zeilenraums einer Matrix in Stufenform die Anzahl der Stufen ist. Hier hat der Zeilenraum also Dimension 3.

So hnlich werden wir die Dimension des Spaltenraums berechnen. Dafür schreiben wir die Spalten der gegebenen Matrix als Zeilen einer neuen Matrix. Hierbei können wir beliebig die Reihenfolge der alten Zeilen / neuen Spalten vertauschen. Dann ist der Zeilenraum der neuen Matrix der Spaltenraum der gegebenen Matrix. Die neue Matrix bringen wir also auf Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 4+\mathring{\imath} \\ \mathring{\imath} & -1 & -1-\mathring{\imath} & -1+4\mathring{\imath} \\ 3 & 1+6\mathring{\imath} & -5+7\mathring{\imath} & 20+5\mathring{\imath} \\ 1+3\mathring{\imath} & -4+5\mathring{\imath} & -10 & 7+23\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & z_2 - \mathring{\imath} z_1 \\ z_3 & \leftarrow & z_3 - 3z_1 \\ z_4 & \leftarrow & z_4 - (1+3\mathring{\imath})z_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 4+\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3\mathring{\imath} & -2+4\mathring{\imath} & 8+2\mathring{\imath} \\ 0 & -1+4\mathring{\imath} & -6+2\mathring{\imath} & 6+10\mathring{\imath} \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_2 & \leftarrow & (7\mathring{\imath})^{-1}(z_3+z_4) \\ z_4 & \leftarrow & z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 4+\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7}+\frac{8}{7}\mathring{\imath} & \frac{12}{7}-2\mathring{\imath} \\ 0 & 1+3\mathring{\imath} & -2+4\mathring{\imath} & 8+2\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{lcl} z_3 & \leftarrow & z_3 - (1+3\mathring{\imath})z_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathring{\imath} & -1+\mathring{\imath} & 4+\mathring{\imath} \\ 0 & 1 & \frac{6}{7}+\frac{8}{7}\mathring{\imath} & \frac{12}{7}-2\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & -\frac{24}{7}-\frac{12}{7}\mathring{\imath} & \frac{2}{7}+\frac{8}{7}\mathring{\imath} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dimension des Zeilenraums dieser Matrix ist somit 3, also auch die Dimension des Spaltenraums der gegebenen Matrix.

Lösung 9.9:

Allgemeine Voraussetzung: Sei K ein Körper.

(a) Voraussetzung: Sei $v = (v_1, v_2) \in K^2$ nicht der Nullvektor, sowie $w = (w_1, w_2) \in K^2$ ein weiterer Vektor.
Behauptung: Es gibt genau dann ein $\lambda \in K$ mit $w = \lambda v$, wenn $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$ gilt.
Beweis: Nehmen wir zuerst an, es gibt ein $\lambda \in K$ mit $w = \lambda v$. Dann gilt:

$$v_1 w_2 - v_2 w_1 = v_1(\lambda v_2) - v_2(\lambda v_1) = 0.$$

Gelte nun $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$. Da (v_1, v_2) nicht der Nullvektor ist, gilt $v_1 \neq 0$ oder $v_2 \neq 0$. Nehmen wir an, es gilt $v_1, v_2 \neq 0$. Dann erhalten wir durch Dividieren der gegebenen Gleichung durch $v_1 v_2$, dass $\lambda := \frac{w_2}{v_2} = \frac{w_1}{v_1}$. Somit gilt, wie gewünscht,

$$\lambda(v_1, v_2) = (\frac{w_1}{v_1} v_1, \frac{w_2}{v_2} v_2) = (w_1, w_2).$$

Ist $v_1 = 0$, und damit $v_2 \neq 0$, so muß auch $w_1 = 0$ sein, und wir können $\lambda := \frac{w_2}{v_2}$ wählen.
Ist $v_2 = 0$, und damit $v_1 \neq 0$, so muß auch $w_2 = 0$ sein, und wir können $\lambda := \frac{w_1}{v_1}$ wählen.

(b) Voraussetzung: Seien $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in K^2$ linear unabhängig.
Behauptung: Zu jedem $u \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Elemente $\alpha, \beta \in K$ mit $u = \alpha v + \beta w$.
Beweis: Sei $u = (u_1, u_2) \in V$.
Existenz: Wir suchen $\alpha, \beta \in K$ mit $u_1 = \alpha v_1 + \beta w_1$ und $u_2 = \alpha v_2 + \beta w_2$. Da v und w linear unabhängig sind, sind beide Vektoren verschieden vom Nullvektor, und nach Teilaufgabe (a) gilt $v_1 w_2 - v_2 w_1 \neq 0$. Nehmen wir an, es gilt $v_1 \neq 0$. Die gesuchten Skalare sollen also insbesondere

$$\alpha = \frac{u_1}{v_1} - \beta \frac{w_1}{v_1}$$

erfüllen. Also auch

$$\frac{u_2 v_1}{v_1} = \frac{u_1 v_2}{v_1} - \beta \frac{w_1 v_2}{v_1} + \beta \frac{w_2 v_1}{v_1},$$

und somit

$$\beta = \frac{u_2 v_1 - u_1 v_2}{v_1 w_2 - v_2 w_1}.$$

Einsetzen liefert, dass dann auch

$$\alpha = \frac{u_1 w_2 - u_2 w_1}{v_1 w_2 - v_2 w_1}$$

gelten muß. Nachrechnen zeigt, dass, wenn wir α und β wie oben wählen, wir tatsächlich $u = \alpha v + \beta w$ erhalten. Analog zeigt man dies auch für $v_2 \neq 0$.
Eindeutigkeit: Seien $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in K$ mit $u = \alpha v + \beta w$ und $u = \alpha' v + \beta' w$, so folgt $(\alpha - \alpha')v + (\beta - \beta')w = 0$. Da aber v und w linear unabhängig sind, haben wir dann schon $\alpha - \alpha' = 0$ und $\beta - \beta' = 0$, also $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$.

Lösung 9.10:

Voraussetzung: Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten n Vektoren

$$v_i := (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{Q}^n \quad (1 \leq i \leq n)$$

mit $a_{jj} = 1$ und $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 2$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Dabei sei $|\cdot|$ der gewöhnliche Absolutbetrag auf $\mathbb{Q}$.

Behauptung: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{Q}^n$.

Beweis: Angenommen $v_1, \ldots, v_n$ wären linear abhängig, es gäbe also $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, nicht alle gleich 0, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

ist. Sei $1 \leq j \leq n$, so gewählt, dass $|\lambda_j| \geq |\lambda_i|$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere ist dann $\lambda_j \neq 0$. Wir betrachten die j-te Komponente obiger Linearkombination und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0.$$

Da $a_{jj} = 1$ ist folgt

$$\lambda_j = -\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \lambda_i a_{ij}$$

und nach Division durch λ_j erhält man

$$1 = -\sum_{\substack{i=1\\i\neg j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ij}.$$

Wir schätzen ab und nutzen aus, dass λ_j betraglich maximal ist

$$1 = |-\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} a_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{n} |\frac{\lambda_i}{\lambda_j}||a_{ij}| \leq \sum_{\substack{i=1\\i\neq j}} |a_{ij}|.$$

Mit $a_{jj} = 1$ folgt daraus aber

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \geq 2$$

im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daher müssen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sein, und bilden daher, und wegen ihrer Anzahl, eine Basis von $\mathbb{Q}^n$.

Lösung 9.11:

Wir betrachten den $\mathbb{F}_{11}$–Vektorraum $V := \{f \mid f\colon \mathbb{F}_{11} \to \mathbb{F}_{11}\}$ aller Abbildungen von $\mathbb{F}_{11}$ nach $\mathbb{F}_{11}$. Wie üblich schreiben wir die Elemente von $\mathbb{F}_{11}$ als ganze Zahlen zwischen 0 und 10.

(a) Für $i = 0, \ldots, 10$ definiere die Abbildung

$$e_i\colon \mathbb{F}_{11} \longrightarrow \mathbb{F}_{11}, \quad k \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls k=i} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist nun $f \in V$ so ist $f(k) = \sum_{i=0}^{10} f(i)e_i(k)$ für $k \in \mathbb{F}_{11}$. Also ist $f = \sum_{i=0}^{10} f(i)e_i$. Dies zeigt, dass die e_i ein Erzeugendensystem von V bilden. Die e_i sind jedoch auch linear unabhängig. Seien dazu $\lambda_i \in \mathbb{F}_{11}$ und $\sum_{i=0}^{10} \lambda_i e_i = 0$. Ausgewertet an $k \in \mathbb{F}_{11}$ folgt

$$0 = \sum_{i=0}^{10} \lambda_i e_i(k) = \lambda_k e_k(k) = \lambda_k.$$

Also ist $\lambda_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{F}_{11}$. Dies zeigt, dass die e_i mit $i = 0, \ldots, 10$ eine Basis von V sind. Mit Nachzählen folgt damit $\dim V = 11$.

(b) Behauptung: $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$ und $W := \{f \in V \mid f \text{ ist linear}\}$ sind Untervektorräume von V.
Beweis: Wir zeigen jeweils die Abgeschlossenheit bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation. Seien $f, g \in U,\ r, s \in W,\ \lambda \in \mathbb{F}_{11}$. Es ist $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, sowie $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda 0 = 0$. Daher ist U ein Untervektorraum von V.

Um den Beweis für W zu führen, betrachten wir $x, y, \mu \in \mathbb{F}_{11}$ und untersuchen $(r+s)$ und (λr) auf Linearität. Es ist

$$(r+s)(x+y) = r(x+y)+s(x+y) = r(x)+r(y)+s(x)+s(y) = (r+s)(x)+(r+s)(y),$$

$$(r+s)(\mu x) = r(\mu x) + s(\mu x) = \mu r(x) + \mu s(x) = \mu(r+s)(x).$$

Dies zeigt, dass die Summer zweier Elemente aus W erneut in W liegt. Analog betrachtet man

$$(\lambda r)(x+y) = \lambda(r(x+y)) = \lambda(r(x)+r(y)) = \lambda r(x) + \lambda r(y) = (\lambda r)(x) + (\lambda r)(y)$$

$$(\lambda r)(\mu x) = \lambda r(\mu x) = \lambda \mu r(x) = \mu \lambda r(x) = \mu(\lambda r(x)),$$

was zeigt, dass auch W ein Untervektorraum von V ist.

(c) Betrachten wir zuerst U. Benutzt man die Basis aus der ersten Teilaufgabe, erkennt man, dass

$$f = \sum_{i=0}^{11} \lambda_i e_i \in U \Leftrightarrow \ \lambda_0 = 0.$$

Damit ist $U = \operatorname{span}(e_1, \ldots, e_{10})$, insbesondere folgt $\dim U = 10$.
Sei nun $g \in W, x \in \mathbb{F}_{11}$. Es ist $g(x) = g(1 \cdot x) = xg(1)$. Also legt schon der Wert an der Stelle 1 die lineare Funktion g vollständig fest. Wir betrachten die Abbildung $g := \mathrm{id}_{\mathbb{F}_{11}}$. Wir zeigen: (g) ist Basis von W. Sei $h \in W$ und sei $h(1) = k$, dann ist

$$kg(x) = kx = xk = xh(1) = h(x1) = h(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{F}_{11}.$$

Also ist $kg = h$, was zeigt, dass g den Raum W erzeugt. Hieraus folgt die Behauptung und $\dim W = 1$.

(d) Wir wissen $\dim W = 1$. Also ist $W \cong \mathbb{F}_{11}$ und man erkennt dass W genau 11 Elemente enthält. Weiter ist $\dim U = 10$, also ist $U \cong \mathbb{F}_{11}^{10}$ und daraus folgt, dass U genau $11^{10} = 25937424601$ Elemente enthält.

Lösung 9.12:

Voraussetzung: Sei K ein Körper. Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$ heißt ein **schwaches magisches Quadrat**, falls es ein $s(A) \in K$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = s(A) \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = s(A) \quad \text{für alle } j \text{ (nicht } i!) \ \in \{1, \ldots, n\}$$

gibt.

(a) Behauptung: $Q(n) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ ist ein schwaches magisches Quadrat}\}$ ist ein Untervektorraum des K–Vektorraumes $K^{n \times n}$ und $s\colon Q(n) \to K,\ A \mapsto s(A)$, ist eine lineare Abbildung.

Beweis: Seien $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ und $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ Elemente von $Q(n)$, und sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, und damit

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = s(A) + s(B) \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = s(A) + s(B) \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Somit ist $A + B \in Q(n)$ mit $s(A + B) = s(A) + s(B)$. Weiter ist $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, und damit

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} = \lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \lambda s(A) \quad \text{für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda a_{ij} = \lambda(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}) = \lambda s(A) \quad \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Somit ist auch $\lambda A \in Q(n)$ mit $s(\lambda A) = \lambda s(A)$.
Wir haben also beide Aussagen bewiesen.

(b) Behauptung: Die Abbildung $(\ker s) \to K^{(n-1)\times(n-1)}$, $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1}$, ist ein Isomorphismus.
Beweis: Linearität: Offensichtlich.
Injektivität: Ist $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \ker s$ mit $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i, j \leq n - 1$, so sind aber, wegen $s(A) = 0$, auch a_{in} und a_{nj} gleich 0 für alle $i, j \in \{1, \ldots, n - 1\}$, und damit gilt auch $a_{nn} = 0$.
Surjektivität: Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$. Setze

$$a_{in} := -\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} \ (1 \leq i \leq n - 1) \quad \text{und} \quad a_{nj} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} \ (1 \leq j \leq n - 1).$$

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} -a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} -a_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}.$$

Setzt man also noch $a_{nn} := -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}$, so ist $A' := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in Q(n)$ mit $s(A') = 0$. Außerdem gilt, dass A' unter der gegebenen Abbildung gerade auf A abgebildet wird.

(c) Behauptung: $\dim Q(n) = (n - 1)^2 + 1$.
Beweis: Dies folgt aus Aufgabe 9.5 (h), da $\dim(\ker s) = \dim K^{(n-1)\times(n-1)} = (n - 1)^2$ und $\dim(\operatorname{im} s) = \dim K = 1$. Letzteres erhält man, weil s surjektiv ist: Es ist für $a \in K$ die Matrix $A := (a_{ij})_{1\leq ij,\leq n}$ mit $a_{11} = a$ und $a_{ij} = 0$, falls $i \neq 1$ oder $j \neq 1$, ein Element von $Q(n)$ mit $s(A) = a$.