Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Lernkontrollfragen

(1) Wie ist der Dualraum V^* definiert? Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, wie ist dann f^* und f^{**} definiert? Wann gilt $V \cong V^*$, wann $V \cong V^{**}$? Wie sieht im zweiten Fall ein *natürlicher* Isomorphismus aus?

(2) Was ist die duale Basis? Wie erhält man die Abbildungsmatrix von f^* aus der von f unter Verwendung der dualen Basis?

(3) Was ist ein Skalarprdoukt? Was ist ein euklidischer/unitärer Vektorraum? Wie kann ein Skalarprodukt durch eine Matrix beschrieben werden? Gegeben eine quadratische Matrix A, welche Eigenschaften muss A haben, damit sie ein Skalarprodukt beschreibt?

(4) Wie erhält man aus einer Basis eine Orthonormalbasis? Was sind orthogonale, was sind unitäre Matrizen? Was sind orthogonale/unitäre Endomorphismen? Welche Eigenwerte können diese haben?

(5) Finde Beispiele für orthogonale Endomorphismen. Wie sehen diese geometrisch aus?

(6) Sei U ein Untervektorraum eines Skalarproduktraums V. Wie ist das orthogonale Komplement $U^\perp$ von U definiert? Welche Eigenschaften hat dieses? Was weiß man über $\dim U^\perp$ für $\dim V < \infty$?

(7) Sei V ein Skalarproduktraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Wie ist die adjungierte Abbildung f^* zu f definiert? Wie erhält man deren Abbildungsmatrix aus einer Abbildungsmatrix von f?

(8) Was bedeuten die Begriffe *selbstadjungiert*, *symmetrisch*, *normal*, *hermitesch*, *orthogonal*, *unitär* für Matrizen bzw. für Endomorphismen? Gibt es Implikationen zwischen den Begriffen? Welche dieser Eigenschaften garantieren die Diagonalisierbarkeit über $\mathbb{R}$, (über $\mathbb{C}$) ?

(9) Warum haben symmetrische Matrizen stets reelle Eigenwerte? Warum lassen sie sich sogar orthogonal diagonalisieren? Was bedeutet *Hauptachsentransformation*? Übe Hauptachsentransformation.

(10) Wann heißt eine Matrix positiv (semi)definit? Wie lässt sich bei gegebener Matrix A die positive (Semi)definitheit überprüfen?

(11) Was bedeutet *Polarzerlegung* einer Matrix?

(12) Was sind Bilinearformen, was sind quadratische Formen? Wie werden sie durch Matrizen beschrieben? Wie verändern sich diese Matrizen bei Basiswechsel? Was ist der Nullraum einer symmetrischen Bilinearform? Ist der Nullraum einer quadratischen Form gerade die Menge ihrer Nullstellen?

(13) Sei A eine symmetrische $n \times n$–Matrix. Was sagt die quadratische Form $x \mapsto x^T Ax$ über die Eigenwerte von A aus? Warum hängen die geordneten Eigenwerte stetig von den Matrixeinträgen ab? Sei S eine weitere symmetrische $n \times n$–Matrix. Kann man sagen, wie sehr sich die Eigenwerte von A und $A + S$ unterscheiden; auch wenn A selbst unbekannt ist?

(14) Was ist ein Ring, was ein Ideal? Wie sind Produkte und Summen von Idealen definiert? Was besagt der Homomorphiesatz? Was sind Nullteiler?

(15) Was ist ein Hauptidealring, was ein euklidischer Ring? Was bedeutet Teilbarkeit? Was hat Teilbarkeit mit Idealen zu tun? Warum gibt es in Hauptidealringen eine *eindeutige Zerlegung in irreduzible Elemente*? Wie ist kgV und ggT definiert?

(16) Wie funktioniert der euklidische Algorithmus?

(17) Ist $\mathrm{ggT}(a, b) = c$ wie findet man x, y mit $ax + by = c$?

(18) Wie löst man ein System simultaner Kongruenzen (vgl. Aufgabe 48)? Ist solch ein System stets lösbar? Was hat dies mit dem chinesichen Restsatz zu tun?

(19) Was sind Elementarteiler? Bestimme die Elementarteiler der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 6 \\ 7 & 12 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -2 \\ 4 & 20 & -2 \end{pmatrix}.$$

(20) Löse alle Übungsaufgaben!
Falls in den Übungsgruppen nicht alle Aufgaben gelöst werden konnten, gibt es auf der Homepage die Lösungen für die Übungsaufgaben. Diese waren ursprünglich für die Tutoren bestimmt. Daher sind viele Argumente nur knapp formuliert. Auch könnten einige Lösungen noch fehlerhaft sein. Daher sind diese Lösungen mit Vorsicht zu genießen. Sie dienen nur als grobe Orientierung.