Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 1

Abgabe: Freitag, 26. April 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei stets K ein Körper.

Aufgabe 1
Seien V, W Vektorräume über K. Wir definieren

$$\begin{aligned} \Psi_V : V &\longrightarrow V^{**} \\ x &\longmapsto l_{V,x} \end{aligned}$$

mit $l_{V,x}(\varphi) := \varphi(x)$ für alle $\varphi \in V^*$. Zeige

(a) Die Abbildung Ψ_V ist linear und wohldefiniert, d.h. es gilt $\Psi_V(x) \in V^{**}$.
(b) Ist V endlichdimensional, so ist die Abbildung Ψ_V ein Isomorphismus von Vektorräumen.
(c) Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt $f^{**} \circ \Psi_V = \Psi_W \circ f$.

Aufgabe 2
Sei V der Vektorraum aller reellwertigen Folgen (mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation). Sei $W = \{(a^k)_{k\geq 1} \in V : 2a^{1+l} - 3a^{2+l} - a^{3+l} = 0,\ \forall l \in \mathbb{N}\}$. Sei $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$, $(a^k)_{k\geq 1} \mapsto a^6$.

(a) Zeige, dass W ein Unterraum von V ist. Bestimme eine Basis von W.
(b) Zeige, dass $f \in W^*$ ist. Bestimme die Koordinaten von f bezüglich der dualen Basis von W aus (a).

Hinweis zu (a):
Die gefundenen Basiselemente müssen nicht explizit dargestellt werden; es genügt eine rekursive Darstellung.

Aufgabe 3
Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \operatorname{Hom}(V, W) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(W^*, V^*) \\ f &\longmapsto f^* \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von K–Vektorräumen ist.

Aufgabe 4
Seien V, W endlichdimensionale K–Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ ein Homomorphismus. Zeige

(a) f^* ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv.
(b) f^* ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.