Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Abgabe: Freitag, 5. Juli 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 41
Zeige folgende Aussagen über den Körper der rationalen Zahlen.
(a) Die Gruppe $(\mathbb{Q}, +)$ besitzt keine maximale Untergruppe.
(b) Die Gruppe $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ besitzt eine maximale Untergruppe.

Aufgabe 42
Finde einen kommutativen Ring R (ohne 1) und ein Ideal $I \neq R$, so dass es kein maximales Ideal J mit $I \subseteq J \subsetneq R$ gibt.
Anleitung: Setze $R := (t) \subseteq \mathbb{Q}[t]$ und $I := (t) \subseteq R$. Aufgabe 41 ist ebenfalls hilfreich.

Aufgabe 43
Sei $R := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (mit komponentenweisen Operationen).
(a) Ist jedes Ideal in R von einem Element erzeugt?
(b) Ist R ein Hauptidealring?

Aufgabe 44
Sei R ein Integritätsring mit folgender Eigenschaft. Zu jedem Ideal $I \subseteq R$ existieren $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Zeige: Zu $x \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ existieren $m \in \mathbb{N}$ und irreduzible Elemente $p_1, \ldots, p_m \in R$ mit $x = p_1 \cdots p_m$.