



Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 12

Abgabe: Freitag, 12. Juli 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 45

Sei $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

- Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Ring ist.
- Bestimme die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}[i]$.
- Zeichne $\mathbb{Z}[i]$ als Teilmenge der Gausschen Zahlenebene.
- Zeige: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z - x| < 1$.
- Zeichne das Hauptideal $(2 - i) \subseteq \mathbb{Z}[i]$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}[i]$.
- Zeige: Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ existiert ein $q \in \mathbb{Z}[i]$ mit $|z - aq| < |a|$.
- Zeige, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein euklidischer Ring ist.
- Finde einen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + 1) \rightarrow \mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 46

Finde paarweise nicht assoziierte irreduzible Elemente $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + i\sqrt{5}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit $p_1 p_2 = q_1 q_2 = 6$. Ist $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ein Hauptidealring?

Hinweis: Es muss nicht gezeigt werden, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subseteq \mathbb{C}$ ein Ring ist (vgl. Aufgabe 45 (a)). Der Betrag $|\cdot|$ auf \mathbb{C} ist auch hier hilfreich.

Aufgabe 47

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $x^6 + x^5 + 2x^4 + x^2 + x + 2$ und $x^3 + x + 1$ im Ring $\mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 48

Finde ein $x \in \mathbb{Z}$, das gleichzeitig folgenden Bedingungen genügt

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{3}, \\x &\equiv 3 \pmod{5}, \\x &\equiv 6 \pmod{14}.\end{aligned}$$