Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 2

Abgabe: Freitag, 3. Mai 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 5
Sei $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Zeige, dass A^tA die Matrix eines Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 6
Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $AA^t = I_n$. Zeige: Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so gilt $A^2 = I_n$. Finde ein Gegenbeispiel, das zeigt, dass die Umkehrung im Allgemeinen falsch ist.

Aufgabe 7
Zeige, dass ein $c \in \mathbb{R}$ exisistiert mit

$$\frac{1}{c}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c\|x\|_1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeichne die Einheitskugeln der Normen $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ und $\|.\|_\infty$ im $\mathbb{R}^2$.

Hinweis:
Für $1 \le p$ und $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_p := (|x^1|^p + \cdots + |x^n|^p)^{\frac{1}{p}}$ beziehungsweise $\|x\|_\infty := \max_{i=1,\ldots,n}(|x^1|, \ldots, |x^n|)$. Der erste Exponent bezeiche dabei den Index, der zweite eine Potenz. Es muss nicht gezeigt werden, dass dies Normen sind.

Aufgabe 8
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine orthonormale Teilmenge von V. Sei $x \in V$ Zeige

(a) Es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$, $u \in V$ mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u$ und $\langle x_i, u\rangle = 0$ für $i = 1, \ldots, n$.
(b) Es gilt die Ungleichung

$$\|x\|^2 \ge \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle^2 .$$