Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Abgabe: Freitag, 10. Mai 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 9

Seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ Basen eines n–dimensionalen K–Vektorraums V. Sei $b_i = \sum_{j=1}^n \lambda_i^j c_j$. Schreibe $(c^*)^i$ als Linearkombination der $(b^*)^j$, $j = 1, \ldots, n$. Drücke zudem die Basiswechselmatrix $M(\mathrm{id}_{V^*})^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*}$ durch die Matrix $M(\mathrm{id}_V)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ aus.

Aufgabe 10

Sei $A = (a^i_j)_{1\le i,j\le n} \in O(n)$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm Deiner Wahl auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige

(a) $|a^i_j| \le 1$ für alle $1 \le i, j \le n$
(b) Die Menge $O(n) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ ist bezüglich $\|\cdot\|$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt.

Aufgabe 11

Sei $V = \mathbb{R}[t]_2 = \{f \in \mathbb{R}[t] \colon \deg(f) \le 2\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 fg\,dt, \quad f, g \in V.$$

Finde eine Orthonormalbasis $B = (v_0, \ldots, v_2)$ mit $v_k \in \operatorname{span}\{t^i \colon i \le k\}$ für $k = 0, 1, 2$.

Aufgabe 12

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $v \in V$ mit $\|v\| = 1$. Betrachte die Abbildung $r_v \colon V \longrightarrow V$, $x \longmapsto x - 2\langle x, v\rangle v$. Zeige

(a) $r_v \in \mathrm{End}(V)$ mit $r_v^2 = \mathrm{id}_V$.
(b) r_v ist orthogonal.
(c) r_v ist diagonalisierbar und hat Determinante -1.

Wie lässt sich r_v anschaulich geometrisch beschreiben?