Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4

Abgabe: Freitag, 17. Mai 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 13

Sei $\sigma\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\sigma(a+ib) \equiv \overline{a+ib} := a - ib$ die komplexe Konjugation. Zeige

(a) Die Abbildung σ ist $\mathbb{R}$–linear und multiplikativ.

(b) Ist $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) = n$, so gibt es $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit
$$f = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} (t - \alpha_i)$$

(c) Ist $f \in \mathbb{R}[t]$, so gibt es $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{R}[t]$ mit $\deg(p_i) \le 2$ und $f = p_1 \cdots p_r$.

(d) Ist $f \in \mathbb{R}[t]$ mit $f(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gibt es $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}[t]$ mit $f = q_1^2 + \cdots + q_k^2$.

Hinweis: Man darf/soll annehmen, dass jedes $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) \ge 1$ eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 14

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum. Bezeichne $\mathrm{Bil}(V)$ die Menge aller Bilinearformen $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, also Abbildungen $f\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ die $\mathbb{R}$–linear in beiden Argumenten sind. Zeige

(a) $\mathrm{Bil}(V)$ wird mit punktweisen Operationen zu einem $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(b) Die Abbildung $\Theta\colon \mathrm{Bil}(V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, V^*)$, $b \mapsto l_b$ mit $l_b(x) := b(x, -)$ ist ein Isomorphismus. Folgere $\dim \mathrm{Bil}(V) = (\dim V)^2$.

(c) Ist b ein Skalarprodukt, so ist $\Theta(b)$ ein Isomorphismus.

Aufgabe 15

Sei $l^2(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen Folgen $(a^k)_{k\ge1}$, für die $\sum_{k\ge1} |a^k|^2$ konvergiert. Zeige, dass $l^2(\mathbb{R})$ ein euklidischer Vektorraum ist (Vgl. Beispiel zu Thm 2.5.2 (iv)).

Hinweis:

Insbesondere ist die Wohldefiniertheit des Skalarprodukts zu zeigen.

Aufgabe 16

Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum. Seien $f, g \in \mathrm{End}(V)$ normal. Dann gilt
$$f \circ g = 0 \Leftrightarrow g \circ f = 0$$