Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5

Abgabe: Freitag, 24. Mai 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 17

Sei V ein endlichdimensionaler K–Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ und $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in K$ paarweise verschieden.

(a) Zu $\mu_0, \ldots, \mu_k$ existiert genau ein $p \in K[t]$ mit $\deg p \leq k$ und $p(\lambda_i) = \mu_i$, $0 = 1, \ldots, k$.

(b) Ist $x \in \mathrm{Eig}(f; \lambda)$ für $\lambda \in K$ und $q \in K[t]$, so ist $q(f)(x) = q(\lambda)x$.

(c) Sei nun V ein unitärer Vektorraum mit $\dim V = n$ dann ist f genau dann normal, wenn ein $p \in \mathbb{C}[t]$, $\deg(p) \leq n$ mit $f^* = p(f)$ existiert.

Aufgabe 18

Sei V ein endlichdimensionaler Skalarproduktraum und $f \in \mathrm{End}(V)$. Zeige, dass dann $\mathrm{tr}(f^* \circ f) \geq 0$ ist. Zeige auch, dass Gleichheit nur für $f = 0$ auftritt.

Aufgabe 19

Finde eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = U^t D U.$$

Aufgabe 20

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv semidefinit und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige

$$\langle x, Ax \rangle = 0 \Rightarrow x \in \ker(A).$$

Finde ein Gegenbeispiel, das illustriert, dass man auf die positive Semidefiniheit von A nicht verzichten kann.