Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6

Abgabe: Freitag, 31. Mai 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 21

Sei $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^t\}$ (vgl. Aufgabe 19, LA1) und $S^+ \subseteq S$ die Menge aller positiv semidefiniten Matrizen. Zeige

(a) $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(AB)$ ist ein Skalarprodukt auf S.
(b) Fasst man die Matrizen in S als Spaltenvektoren mit n^2 Einträgen auf, so ist $\langle -, -\rangle$ gerade das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$.
(c) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $xx^t \in S^+$.
(d) Es gilt $\{A \in S \mid \langle A, B\rangle \geq 0 \text{ für alle } B \in S^+\} = S^+$.

Aufgabe 22

Sei b eine symmetrische Bilinearform auf einem K–Vektorraum V. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ schreiben wir $U^\perp := \{v \in V \mid b(v, u) = 0,\ \forall u \in U\}$. Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume. Gelten folgende Aussagen für alle symmetrischen Bilinearformen? Zeige oder widerlege durch ein endlichdimensionales Gegenbeispiel

(a) $(U_1 + U_2)^\perp \supseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
(b) $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$.
(c) $(U_1 \cap U_2)^\perp \supseteq U_1^\perp + U_2^\perp$.
(d) $(U_1 \cap U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp + U_2^\perp$.
(e) $U_1 \supseteq U_1^{\perp\perp}$.
(f) $U_1 \subseteq U_1^{\perp\perp}$.

Aufgabe 23

Bestimme eine Polarzerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ist diese eindeutig?

Aufgabe 24

Sei V ein K–Vektorraum, $\dim V = n$, seien $f, g \in \operatorname{End}(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeige: Sind f, g diagonalisierbar, dann sind sie *simultan diagonalisierbar*, das heißt es gibt eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V, so dass jedes v_i ein Eigenvektor von f *und* von g ist.