Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7

Abgabe: Freitag, 7. Juni 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 25
Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ endlichdimensionaler Unterraum. Sei $x \in V$. Zeige

(a) Sind $v, w \in V$ mit $\langle v, w\rangle = 0$, so ist $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v + w\|^2$.
(b) Es existiert ein $u_0 \in U$ mit $\|x - u_0\| \leq \|x - u\|$ für alle $u \in U$.
(c) Es gilt $(x - u_0) \perp U$, also $\langle x - u_0, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$.
(d) Bestimme u_0 für $V = \mathbb{R}^4$ mit $x = (7, 3, 1, 1)^t$ und $U = \operatorname{span}\{(1, 2, 2, 1)^t, (1, 0, 0, 0)^t\}$.

Aufgabe 26
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass A positiv semidefinit ist und bestimme $\sqrt{A}$.

Aufgabe 27
Finde alle $(x, y)^t \in \mathbb{R}^2$ mit

$$2x^2 + 12xy - 7y^2 = 0.$$

Wie lässt sich diese Menge geometrisch beschreiben?

Aufgabe 28
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 21 & 7 \\ 21 & 74 & 32 \\ 7 & 32 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimme zu A die Zahlen s, t aus Theorem 3.3.4.
Hinweis:
Anstatt zu diagonalisieren (schwierig!), überlege man sich, inwiefern Zeilen/Spalten–Transformationen weiterhelfen.