Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8

Abgabe: Freitag, 14. Juni 2013, 10.00 Uhr, in die Briefkästen neben F 411. Bitte verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt, und schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf jedes Blatt.

Sei K stets ein Körper.

Aufgabe 29

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$–Vektorraum und φ, ψ symmetrische Bilinearformen auf V. Sei ψ positiv definit. Zeige, dass ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $x \in V \setminus \{0\}$ existieren mit

$$\varphi(x,y) = \lambda\psi(x,y) \qquad \text{für alle } y \in V.$$

Hinweis:
Man gehe ähnlich wie im Beweis zu Theorem 3.4.4 vor: Für geeignete $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $t \in \mathbb{R}$ berechne man

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\varphi(x+ty, x+ty)}{\psi(x+ty, x+ty)}\bigg|_{t=0}.$$

Aufgabe 30

Sei $A\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \mapsto A(t)$ stetig und symmetrisch für alle $t \in \mathbb{R}$. Seien $\lambda_1(t) \le \cdots \le \lambda_n(t)$ die angeordneten Eigenwerte von $A(t)$. Lassen sich zu $\lambda_i(t)$ stets Eigenvektoren $x_i(t)$ für $(i = 1,\ldots,n)$ so wählen, dass $x_i(t)$ stetig von t abhängt? Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 31

Sei

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 \\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12 \\ 0 & 0 & \frac12 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Für $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ symmetrisch seien $\lambda_1 \le \cdots \le \lambda_4$ die geordneten Eigenwerte von A und $\mu_1 \le \cdots \le \mu_4$ die geordneten Eigenwerte von $A+S$. Zeige $|\lambda_i - \mu_i| \le 1$ für $i = 1,\ldots,4$.
Hinweis: Man zeige zunächst, dass $\left|(x^1)^2 + x^2x^3 + x^3x^4\right| \le 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^3$ gilt.

Aufgabe 32
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrische Matrizen, B positiv definit. Zeige: Es gibt eine Basis $x_1, \dots, x_n$ des $\mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so dass

$$Ax_i = \lambda_i B x_i.$$

Hinweis: Betrachte $\sqrt{B^{-1}}$.

Bemerkung
Die Aufgaben 29 und 32 beschäftigen sich mit Eigenwerten einer quadratischen Form bezüglich einer anderen.

Definition
Seien φ, ψ symmetrische Bilinearformen auf einem $\mathbb{R}$–Vektorraum V. Dann heißt $x \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektor von φ bezüglich ψ zum Eigenwert λ, falls

$$\lambda\psi(-, x) = \varphi(-, x)$$

gilt.