Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 1

Hinweis zu Aufgabe 1

(a) Zunächst zeigen wir die Linearität von Ψ_V. Seien dazu $x, y \in V$, $\lambda \in K$ und $\varphi \in V^*$. Es ist $\Psi_V(x+y)(\varphi) = l_{V,x+y}(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = (\Psi_V(x)+\Psi_V(y))(\varphi)$, sowie $\Psi_V(\lambda x)(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\Psi_V(x)(\varphi)$. Da diese Gleichungen für alle $\varphi \in V^*$ gelten, folgt $\Psi_V(x+y) = \Psi_V(x)+\Psi_V(y)$ und $\Psi_V(\lambda x) = \lambda\Psi_V(x)$. Sei nun $x \in V$ fixiert. Wir zeigen, dass tatsächlich $\Psi_V(x) \in V^{**}$ gilt. Seien dazu $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$, $\lambda \in K$. Dann ist $\Psi_V(x)(\varphi_1 + \varphi_2) = l_{V,x}(\varphi_1+\varphi_2) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x) = \Psi_V(x)(\varphi_1)+\Psi_V(x)(\varphi_2)$. Weiter gilt $\Psi_V(x)(\lambda\varphi_1) = (\lambda\varphi_1)(x) = \lambda\varphi_1(x) = \lambda\Psi_V(x)(\varphi_1)$. Daher ist $\Psi_V(x)$ eine K–lineare Abbildung.

(b) Wir zeigen zunächst $\ker(\Psi_V) = \{0\}$. Sei dazu $x \in \ker(\Psi_V) \subseteq V$. Dann gilt $\Psi_V(x)(\varphi) = \varphi(x) = 0$ für alle $\varphi \in V^*$. Wäre $x \neq 0$, so ließe sich die Menge $\{x\}$ zu einer Basis ergänzen und eine Abbildung $\varphi \in V^*$ konstruieren mit $\varphi(x) = 1$. Dies ist nicht der Fall, also gilt $x = 0$. Also ist Ψ_V injektiv. Wegen $\dim V = \dim V^*$ ist Ψ auch surjektiv.

(c) Beide Abbildungen haben V als Definitionsbereich und W^{**} als Bildbereich. Wir wählen daher $x \in V$ und $\varphi \in W^*$ und zeigen

$$(f^{**} \circ \Psi_V)(x)(\varphi) = (\Psi_W \circ f)(x)(\varphi).$$

Ist dies für alle $\varphi \in W^*$ erfüllt, so folgt die Behauptung. Es ist

$$\begin{aligned}(f^{**} \circ \Psi_V)(x)(\varphi) &= f^{**}(l_{V,x})(\varphi)\\ &= (l_{V,x} \circ f^*)(\varphi)\\ &= l_{V,x}(f^*(\varphi))\\ &= l_{V,x}(\varphi \circ f)\\ &= (\varphi \circ f)(x)\\ &= \varphi(f(x)).\end{aligned}$$

Anderseits gilt

$$\begin{aligned}(\Psi_W \circ f)(x)(\varphi) &= \Psi_W(f(x))(\varphi)\\ &= l_{W,f(x)}(\varphi)\\ &= \varphi(f(x)).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass beide Abbildungen gleich sind.

Hinweis zu Aufgabe 2

(a) Der Nachweis, dass W ein Unterraum von V ist, ist Routine. Zunächst bemerken wir, dass ein Element in W durch die Angabe der ersten zwei Werte *eindeutig* bestimmt ist. Wir definieren die Folgen $a := (a^k)_{k\geq 1}$ mit

$a^1 = 1$, $a^2 = 0$ und $a^k = -3a^{k-1} + 2a^{k-2}$ sowie $b := (b^k)_{k\geq 1}$ mit $b^1 = 0$, $b^2 = 1$ und $b^k = -3b^{k-1} + 2b^{k-2}$. Sicherlich sind a, b linear unabhängig, da sie schon in V linear unabhängig sind. Anderseits lassen sich durch Linearkombination von a und b Folgen mit beliebigen Einträgen in der ersten und zweiten Komponente erzeugen. Das heißt a, b erzeugen auch W und bilden daher eine Basis von W.

(b) Der Nachweis, dass $f \in W^*$ ist, ist wieder Routine. Wir bestimmen zunächst die Folgen a und b bis zum 6. Glied. Es ist

$$a = (1, 0, 2, -6, 22, -78, \dots) \quad \text{und} \quad b = (0, 1, -3, 11, -39, 139, \dots)$$

Also ist $f(a) = -78$ und $f(b) = 139$. Um die Darstellung von f bezüglich der dualen Basis zu bestimmen, betrachten wir den Ansatz $f = \lambda a^* + \mu b^*$ weiter ist $f(a) = \lambda a^*(a) + \mu b^*(a) = \lambda = -78$ und $f(b) = \lambda a^*(b) + \mu b^*(b) = \mu = 139$.

Hinweis zu Aufgabe 3

Wir zeigen zunächst, dass Φ eine K–lineare Abbildung ist. Seien dazu $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W), \lambda \in K$ sowie $\varphi \in W^*$ und $x \in V$. Es ist $\Phi(f + g)(\varphi)(x) = (\varphi \circ (f + g))(x) = \varphi((f + g)(x)) = \varphi(f(x)) + \varphi(g(x)) = \Phi(f)(x) + \Phi(g)(x)$ und $\Phi(\lambda f)(\varphi)(x) = \varphi \circ (\lambda f)(x) = \varphi(\lambda f(x)) = \lambda\varphi(f(x))$. Da beide Gleichungen für alle $\varphi \in W^*$ und $x \in V$ gelten, folgt die Linearität von Φ. Als nächstes zeigen wir, dass Φ injektiv ist. Angenommen $\Phi(f) = f^* = 0$ für ein $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gilt $\varphi \circ f = 0$ für alle $\varphi \in W^*$. Angenommen es gäbe ein $x \in V$ mit $f(x) = y \neq 0$. Wir ergänzen $\{y\}$ zu einer Basis von W. Dann gibt es eine Linearform ϕ_0 mit $\phi_0(y) = 1$. Dann gilt aber auch $\varphi_0 \circ f(x) = 1 \neq 0$ und daher $f^* \neq 0$. Also ist Φ injektiv. Gilt $\dim V = n$ und $\dim W = m$ so ist $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = \dim \mathrm{Hom}(W^*, V^*) = nm$. Dies zeigt, dass Φ auch surjektiv sein muss.

Hinweis zu Aufgabe 4

(a) Sei zunächst f^* surjektiv. Angenommen $f(x) = 0$ aber $x \neq 0$. Wir ergänzen $\{x\}$ zu einer Basis von V. Dann gibt es ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(x) = 1$. Da f^* surjektiv ist, gibt es ein $\psi \in W^*$ mit $f^*(\psi) = \varphi$. Dann folgt $1 = \varphi(x) = f^*(\psi)(x) = \psi(f(x)) = \psi(0) = 0$, was ein Widerspruch ist. Also muss $x = 0$ gewesen sein. Dies zeigt, dass f injektiv ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass f injektiv ist. Sei $\varphi \in V^*$. Dann definiere folgende Linearform $\psi \in W^*$. Sei U ein Komplement von $\mathrm{im}(f)$ in W. Definiere $\psi \in W^*$ durch $\psi(f(x)) = \varphi(x)$ für $x \in \mathrm{im}(f)$ und $\psi_{|U} = 0$. Dann gilt $f^*(\psi) = \varphi$.

(b) Sei zunächst f^* injektiv. Sei U ein Komplement von $\mathrm{im}(f)$ in W. Ist $U \neq \{0\}$ so gibt es zwei Linearformen φ_1, φ_2 mit $\varphi_1 = \varphi_2$ auf $\mathrm{im}(f)$ und $\varphi_1 \neq \varphi_2$ auf U. Dann gilt $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$ aber $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von f^*. Daher gilt $U = \{0\}$, also ist f surjektiv.

Sei umgekehrt f surjektiv. Angenommen $f^*(\varphi_1) = f^*(\varphi_2)$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Dann gilt $\varphi_1 \circ f = \varphi_2 \circ f$ und damit $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ für alle $x \in \mathrm{im}(f)$. Wegen $\mathrm{im}(f) = V$ folgt $\varphi_1 = \varphi_2$.