Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 10

Hinweis zu Aufgabe 37

(a) Sei $x \in J$. Wegen $I + Q = R$ gibt es $a \in I$, $b \in Q$ mit $a + b = 1$. Dann ist
$$x = 1 \cdot x = (a + b)x = ax + bx$$
Dabei ist $bx \in Q$ und $ax \in IJ \subseteq Q$. Also ist $x \in Q$.

(b) Wegen a, b teilerfremd ist $(a) + (b) = \mathbb{Z}$. Aus $a \mid bc$ folgt $(bc) = (b)(c) \subseteq (a)$. Mit Teil (a) folgt daher $(c) \subseteq (a)$ und daher $a \mid c$.

Hinweis zu Aufgabe 38

Wir betrachten $R = \mathbb{R}[w, x, y, z]$. Wir definieren den Grad eines Polynoms in R als den Totalgrad. Man sieht leicht, dass $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$ gilt. Wir setzen $I = (w, x)$ und $J = (y, z)$. Sei $f = xy + wz \in IJ$. Angenommen es wäre $f = gh$ mit $g \in I$ und $h \in J$. Dann muss $\deg(g) = \deg(h) = 1$ gelten. Dann ist
$$g = a_1 w + a_2 x \quad h = b_1 y + b_2 z$$
für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Koeffizientenvergleich ergibt die Gleichungen
$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= 0 \\ a_2 b_2 &= 0 \\ a_1 b_2 &= 1 \\ a_2 b_1 &= 1 \end{aligned}$$

Wir betrachten zunächst die ersten beiden Gleichungen. Angenommen $a_1 = 0$. Wäre $a_2 = 0$, so wäre $f = 0$, was unmmöglich ist. Also gilt $a_1 = 0 = b_2$. Dann kann aber nicht $a_1 b_2 = 1$ gelten. Wäre $b_1 = 0$, so muss $a_2 = 0$ sein, was ein Widerspruch zur letzten Gleichung ist. Also lässt sich f nicht als Produkt zweier Elemente aus I und J schreiben. Wäre eines der Ideale I und J ein Hauptideal, so wäre dies möglich. Also ist weder I noch J ein Hauptideal.

Hinweis zu Aufgabe 39

Sei
$$\mathcal{S} := \{U \subseteq V : \langle x, y \rangle = 0, \ \forall x \neq y \in V\}.$$
Da alle einelementigen Mengen $U \subseteq V$ in $\mathcal{S}$ liegen ist $\mathcal{S} \neq \varnothing$. Sei $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ eine totalgeordnete Teilmenge. Wir betrachten die Menge
$$X := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T.$$
Sicherlich ist $T \subseteq X$ für alle $T \in \mathcal{T}$. Wir zeigen $X \in \mathcal{S}$. Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Es gibt dann $T_x, T_y \in \mathcal{T}$ mit $x \in T_x$ und $y \in T_y$. Da $\mathcal{T}$ total geordnet ist gilt $T_y \subseteq T_x$ oder $T_x \subseteq T_y$. Gelte ohne Einschränkung ersteres. Dann ist $x, y \in T_x$.

Wegen $T_x \in \mathcal{S}$ gilt $\langle x, y\rangle = 0$. Also folgt $X \in \mathcal{S}$. Das Lemma von Zorn impliziert, dass $\mathcal{S}$ maximale Elemente besitzt.

Hinweis zu Aufgabe 40

Angenommen $a, b \in R$ mit $ab \in I$. Wir betrachten den Körper $K = R/I$. In diesem gilt $(a+I)(b+I) = 0$. Also ist $a+I = 0$ oder $b+I = 0$. Ist ersteres der Fall, so ist $a \in I$, ist letzteres der Fall, so ist $b \in I$.